Z-SERIES
SOMMATION EXACTES de CERTAINES SÉRIES en « J »

Robert Coquidé (15/05/2018)

<u>Etant donnée une série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ***, <u>quelle est la fonction</u>*** $f(x)$ ***<u>admettant ce développement comme développement de Mac-Laurin</u>*** ? ***<u>Pour une valeur de x</u> (légitime) <u>rationnelle fixée, quelle est la valeur exacte de</u>*** $f(x)$?

Nous nous limiterons, ici, aux séries (*que nous appellerons* « **Z-Séries** ») telles que :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ où $a_n = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$ (*polynôme de degré k de la variable n*) b_p rationnels (*ainsi que les* a_n) ; les rayons de convergence sont tous égaux à 1

Et nous nommerons « **Z-Fonction** » la fonction correspondant à une « **Z-Série** » donnée.

(Ex. de z-série étudiée dans cet article : $\sum_{n=1}^{\infty}(4+3n-\frac{2}{7}n^2+\frac{5}{3}n^3)x^n$ pour $|x|<1$)

I) <u>Rafraîchissements mathématiques</u>

(*le lecteur sera sensible à toute la poésie qui s'exhale de cette expression*!)

1) <u>Séries entières</u>

Une série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (*où x est réel ou complexe ainsi que les coefficients* a_n) peut **converger** (*vers sa somme*), **diverger** (*son module augmente indéfiniment*) ou être **indéterminée**. On lui associe son **rayon de convergence** $R = \lim_{n\to\infty}(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|)$ (*si cette limite existe*).

La série est alors **simplement, absolument et uniformément convergente** si :
$|x| \le R-\varepsilon$ ($\forall$ ε *positif fixé arbitrairement petit*).

Il est permis de **dériver** ou **intégrer** une telle série entière autant de fois que l'on voudra : on obtient d'autres séries entières de **même rayon de convergence**. On peut calculer des combinaisons linéaires de séries entières.

La formule de **Mac-Laurin** permet de développer en série une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Dans cet article, la réciproque est étudiée pour les Z-SERIES.

2) <u>Nombres de Stirling de 2^e espèce</u> S_k^j

Ce sont des entiers > 0 vérifiant la ***formule de récurrence*** :

$$\boxed{S_k^j = S_{k-1}^{j-1} + jS_{k-1}^j \quad \text{(j et k entiers > 0)} \quad \text{et} \quad S_k^1 = S_k^k = 1}$$

(S_k^j est le nombre de partitions en j classes d'un ensemble de k éléments)

Calculs directs : $\boxed{S_k^j = \frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i} C_j^i i^k}$ et $\boxed{S_{k+1}^{j+1} = \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i} C_j^i (1+i)^k}$

Tableau des nombres de Stirling de 2^{e} espèce :

(un des nombreux petits frères du triangle de Pascal)

k \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	1	1									
3	1	3	1								
4	1	7	6	1							
5	1	15	25	10	1						
6	1	31	90	65	15	1					
7	1	63	301	350	140	21	1				
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1			
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	
11	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1

II) Aspects informatiques

Si le mot "**informatique**" n'existait pas, on utiliserait l'expression "**combinatorique appliquée**" (*combinatorique : ensemble des concepts mathématiques concernant les ensembles d'ordre fini*).

Dans un ordinateur, il y a un **nombre fini** de disques durs, CD, disquettes …. Ils contiennent un **nombre fini** de répertoires contenant un **nombre fini** de fichiers, classés suivant un **nombre fini** de types différents…. Un fichier de type "**base de données**", par exemple, contiendra un **nombre fini** d'enregistrements contenant chacun un **nombre fini** de champs, eux-mêmes composés d'un **nombre fini** d'octets contenant chacun 8 bits plus quelques bits de contrôle ….

Le **codage numérique** utilisera 1, 2, 3, 4, 6, 8, 16, 32 … octets (*selon l'organisation de l'ordinateur, la taille des nombres et la précision désirées*). Dans tous les cas, on ne pourra coder qu'un **nombre fini** de nombres distincts.

Sous forme décimale développée, seuls des **nombres rationnels à développement décimal limité** (*codables dans les octets alloués*) sont utilisés dans un ordinateur : quand on affirme multiplier par π, c'est **un abus de langage** (*jamais un ordinateur n'a effectué un produit par* π*: ce nombre a toujours été remplacé par une approximation rationnelle à développement décimal limité*).

Il est possible, en informatique, de représenter un nombre rationnel soit :

- par un **développement décimal** (*ce ne sera généralement qu'une approximation, sauf s' il est "limité" … suffisamment*);

Ex : **3.1415926535**

- par un **couple de nombres entiers** (*étendus* en **J**) : numérateur, dénominateur;

Ex : **22r7** (en **J**) ou couple **22 7** (*numérateur, dénominateur*)

Un progiciel de gestion de bases de données gère un ensemble (*fini!*) de relations binaires entre éléments d'ensembles finis, des applications d'un ensemble d'ordre fini dans un autre, des sous-ensembles extraits d'ordre fini ….

Il existe une **bijection** entre le vocabulaire des bases de données (*relationnelles !*) et celui des ensembles (*finis!*).

III) Aspects numériques

Le matheux "**pur**" est totalement satisfait quand une série **converge**.

Le praticien du calcul numérique veut, certes, que la série ***converge***, mais aussi qu'elle converge "**vite**".

Si le **rayon de convergence** est égal à 1, cette convergence est très lente lorsque le module de x est voisin de 1.

A l'**erreur systématique** (*étudiée dans les livres de mathématiques pures*) s'ajoute une **erreur d'arrondi** (*ou de troncature*) dépendant de l'outil de calcul.

IV) Petit développement mathématique

Posons :

$\boxed{Z_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n}$ $\quad \forall k \in \mathrm{N}$ On obtient : $\boxed{Z_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}}$ (*série géométrique*)

x réel ou complexe tel que $|x| \leq 1-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ *étant fixé arbitrairement petit*).

Ces séries sont **uniformément et absolument convergentes**.

1) Formule de récurrence

Utilisons l'opérateur $D = x\frac{d}{dx}$, et $\boxed{y = Z_0(x) = \frac{x}{1-x}}$. On obtient :

$$Dy = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \left(\frac{x}{1-x}\right) + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dy = y + y^2}$$

$$Dy^m = x\frac{d}{dx}y^m = mxy^{m-1}\frac{d}{dx}y = my^{m-1}Dy = my^{m-1}(y+y^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dy^m = my^m + my^{m+1}} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$DZ_k(x) = x\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+1}x^n = Z_{k+1}(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{DZ_k(x) = Z_{k+1}(x)} \quad \forall k \in \mathrm{N}.$$

Par suite :

$Z_0(x) = y$; $Z_1(x) = DZ_0(x) = Dy = y + y^2$; $Z_2(x) = D(y+y^2) = y + 3y^2 + 2y^3$ etc….

En écrivant $\quad Z_k(x) = \sum_{j=0}^{k} d_k^j y^{j+1} \quad$ (a) on peut écrire aussi :

$$Z_k(x) = DZ_{k-1}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} d_{k-1}^j Dy^{j+1} = \sum_{j=0}^{k-1}\{(j+1)d_{k-1}^j y^{j+1} + (j+1)d_{k-1}^j y^{j+2}\}$$

et $\quad Z_k(x) = \sum_{j=1}^{k} j d_{k-1}^{j-1} y^{j+1} + \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)d_{k-1}^j y^{j+1} \quad$ (b)

d'où, en identifiant (a) et (b) : (*Polynôme de la variable y*)

$$\boxed{\begin{array}{c} Z_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \sum_{j=0}^{k} d_k^j y^{j+1} \quad \text{où} \quad y = \frac{x}{1-x} \quad ; \quad |x|<1 \quad \text{pour tout entier } k \geq 0 \\ d_k^0 = 1 \quad ; \quad d_k^j = j d_{k-1}^{j-1} + (j+1)d_{k-1}^j \quad ; \quad d_k^k = k! \quad ; \quad d_k^j = 0 \text{ si } j > k \end{array}}$$

Remarque : le calcul de l'infinité de termes de la série en x est remplacé par celui du nombre fini de termes d'un polynôme en y : c'est une fonction rationnelle *(quotient de 2 polynômes)* de la variable x.

Tableau des d_k^j

k \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	3	2						
3	1	7	12	6					
4	1	15	50	60	24				
5	1	31	180	390	360	120			
6	1	63	602	2100	3360	2520	720		
7	1	127	1932	10206	25200	31920	20160	5040	

On peut remarquer que dans ce tableau des d_k^j, la colonne j est multiple de j!

2) Expression utilisant les nombres de Stirling de 2^e^ espèce

Posons $d_k^j = j!\beta_{k+1}^{j+1}$ qui impose $\beta_k^1 = \beta_k^k = 1$ et $j!\beta_{k+1}^{j+1} = j.(j-1)!\beta_k^j + (j+1)j!\beta_k^{j+1}$

$\beta_{k+1}^{j+1} = \beta_k^j + (j+1)\beta_k^{j+1}$ et, en changeant j en j-1 et k en k-1 , on obtient :

$\beta_k^j = \beta_{k-1}^{j-1} + j\beta_{k-1}^j$ et $\beta_k^1 = \beta_k^k = 1$ pour j et k entiers > 0

On reconnaît (*avec stupeur !*) les **nombres de Stirling de 2^e^ espèce** $\beta_k^j = S_k^j$

Il vient donc d'être démontré:

$$\boxed{Z_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \sum_{j=0}^{k} S_{k+1}^{j+1} j!\, y^{j+1} = \sum_{j=0}^{k} d_k^j y^{j+1} \quad ; \quad d_k^j = S_{k+1}^{j+1} j! = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} C_j^i (1+i)^k \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad |x|<1 \quad \forall k \in \mathrm{N}}$$

On en déduit sans peine pour les z-séries étudiées :

$$\boxed{a_n = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{k} b_p Z_p(x)}$$

Remarques :

Les $\mathrm{Z}_k(x)$ sont des **fonctions rationnelles** (*quotients de polynômes en x*)

Une série de termes rationnels n'a pas toujours une somme rationnelle

(ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = 2.7182818284590452353.... =$ nombre irrationnel)

Si x est rationnel, il en est de même de y, des séries $Z_k(x)$ et des séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{k} b_p Z_p(x)$ étudiées ici (*avec* $a_n = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$*, si les* b_p *sont rationnels*).

En **J** il est possible d'obtenir ces valeurs rationnelles ***"exactes"*** sous forme de quotients de 2 entiers étendus ou ou non.

Expression de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ où $a_n = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$ **en termes finis**

On a démontré que $f(x) = \sum_{p=0}^{k} b_p Z_p(x)$ où $Z_p(x) = \sum_{j=0}^{p} d_p^j y^{j+1}$ donc :

$f(x) = \sum_{p=0}^{k} b_p \sum_{j=0}^{p} d_p^j y^{j+1} = \sum_{j=0}^{k} (\sum_{p=j}^{k} b_p d_p^j) y^{j+1}$ où $y = \frac{x}{1-x}$ ce qui peut s'écrire

$f(x) = (\frac{x}{1-x}) \sum_{j=0}^{k} c_j (\frac{x}{1-x})^j$ avec $c_j = \sum_{p=j}^{k} b_p d_p^j$ d'où le théorème :

$$\boxed{\begin{pmatrix} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad |x|<1 \\ a_n = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x) = (\frac{x}{1-x}) \sum_{j=0}^{k} c_j (\frac{x}{1-x})^j \\ c_j = \sum_{p=j}^{k} b_p d_p^j \end{pmatrix}}$$ polynôme en $y = \frac{x}{1-x}$

V) Programmation en J et utilisation

7 "pro-verbes" (*ou fonctions*) dont 2 monadiques et 5 dyadiques : programmation **explicite** (*comme en APL "traditionnel"*) sauf 2 en **implicite** (*CCC et EXEC*)

```
     S =:  4  :  '(%!x)*+/(_1^x-i)*(i!x)*(i=.>:i.x)^y' "0 0
     d =:  4  :  '+/(_1^x-i)*(i!x)*(>:i=.i.>:x)^y' "0 0
     Z =:  4  :  '+/(p d x)*(y%-.y)^>:p=.i.>:x' "0 0
ZSerie =:  4  :  '+/x*(i.#x) Z y' "1  0
   CCC =:  d/~@i.@#+/ .*]
  EXEC =:  ".@(1!:2&2)        NB. affiche et exécute une chaîne de caractères
   ZFT =:  4  : 'x,'' =: (*'',(":CCC y),'' &p.)@(%-.)'''
```

1) **Nombres de Stirling de 2^e^ espèce** $S_k^j = \dfrac{1}{j!}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i}C_j^i i^k$

En J :

```
S =:  4  :  '(%!x)*+/(_1^x-i)*(i!x)*(i=.>:i.x)^y' "0 0
```

Utilisation: `j S k` ⇔ calcul de S_k^j

```
    3  S  5                        NB. valeur de S(3,5)
25
    1  2  3  4  5   S  5        NB. nombres d'une même ligne du tableau des S
1 15 25 10 1
    3   S   3  4  5  6          NB. 4 nombres d'une même colonne
1 6 25 90
    |: 1 2 3  S/  4 5 6 7   NB. matrice rectangulaire extraite du tableau des S
1   7    6
1  15   25
1  31   90
1  63  301
```

NB. valeur de S_5^3 ; NB. nombres d'une même ligne du tableau des S_k^j ; NB. matrice rectangulaire extraite du tableau des S_k^j

2) **Nombres** $d_k^j = S_{k+1}^{j+1}j! = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}C_j^i(1+i)^k$

En J :

```
d =:  4  :  '+/(_1^x-i)*(i!x)*(>:i=.i.>:x)^y' "0 0
```

Utilisation: `j  d  k` ⇔ calcul de d_k^j

Ex :

```
    9  d  12
14270256000
    0  1  2  3  4     d     4      NB. nombres d'une même ligne du tableau des d
1  15  50  60  24
    5   d     5  6  7  8            NB. 4 nombres d'une même colonne du tableau
120  2520  31920  317520
```

NB. nombres d'une même ligne du tableau des d_k^j

```
    |:  1 2 3  d/  4  5  6  7
```
NB. matrice rectangulaire extraite du tableau
```
 15    50     60
 31   180    390
 63   602   2100
127  1932  10206
    7 2 3   d    9 12 6
3780000  523250  2100
```
NB. d_9^7, d_{12}^2, d_6^3

3) **Séries** $Z_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \sum_{j=0}^{k} S_{k+1}^{j+1} j!\, y^{j+1} = \sum_{j=0}^{k} d_k^j y^{j+1}$ ($k \in \mathrm{N}$)

En J :

```
Z =:  4  :  '+/(p d x)*(y%-.y)^>:p=.i.>:x' "0 0
```

Utilisation : `k  Z  x` $\Leftrightarrow$ calcul de $Z_k(x)$ où $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}$ et $|x| < 1$

Ex :
```
    3x   Z   1r2
26
```
NB. $\boxed{Z_3(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26}$

```
    2 x: (i.8x) Z 1r2
    1 1
    2 1
    6 1
   26 1
  150 1
 1082 1
 9366 1
94586 1
```
NB. $\boxed{Z_0(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1}$

NB. $\boxed{Z_1(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2}$

NB. $\boxed{Z_2(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6}$

NB. $\boxed{Z_3(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26}$

NB. $\boxed{Z_4(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} = 150}$

NB. $\boxed{Z_5(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} = 1082}$

NB. $\boxed{Z_6(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^n} = 9366}$

NB. $\boxed{Z_7(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n} = 94586}$

```
    7  8  9x   Z   1r3
2375.0625  17295  141683.25
```
NB. $Z_k(1/3)$ pour k = 7 8 9 (forme décimale)

NB. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{3^n}$ (en flottant)

```
    x:  7  8  9x  Z  1r3
38001r16  17295  566733r4
```
NB. $Z_k(1/3)$ pour k = 7 8 9 (forme rationnelle)

NB. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{3^n}$ (valeurs exactes)

```
   2 x: 7  8  9x  z  1r3
```
NB. $Z_k(1/3)$ pour k = 7 8 9 (2 entiers)

```
 38001   16
```
NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{3^n}=\frac{38001}{16}}$

```
 17295    1
```
NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{3^n}=17295}$

```
566733    4
```
NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{3^n}=\frac{566733}{4}}$

```
   5x z 1r5  2r7  111r113
6.904296875  31.04192  3700327491615.7505
```
NB. $Z_5(x)$ pour x=1/5 , 2/7 , 111/113

On obtient le résultat exact même si la variable est très voisine de 1 :

```
   x:   5x  z  1r5  2r7  111r113
3535r512  97006r3125  14801309966463r4
```
NB. idem , notation "rationnelle"

```
   2 x: 5x  z  1r5  2r7  111r113
          3535    512
         97006   3125
14801309966463      4
```
NB. idem quotient de 2 entiers

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}=\frac{3535}{512}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^5}{7^n}=\frac{97006}{3125}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{111^n n^5}{113^n}=\frac{14801309966463}{4}}$

```
   2  x:  (i.15x)  z  3r10
                  3            7
                 30           49
                390          343
               6870         2401
             159510        16807
            4635030       117649
          161694390       823543
          940120410       823543
        43727535930      5764801
```
NB. $Z_k(3/10)$ pour k = 0 1 2 3 4 … 13 14

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{10^n}=\frac{3}{7}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{10^n}=\frac{30}{49}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{10^n}=\frac{390}{343}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^3}{10^n}=\frac{6870}{2401}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^4}{10^n}=\frac{159510}{16807}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^5}{10^n}=\frac{4635030}{117649}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^6}{10^n}=\frac{161694390}{823543}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^7}{10^n}=\frac{940120410}{823543}}$

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^8}{10^n}=\frac{43727535930}{5764801}}$

```
2288119159290   40353607
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^9}{10^n}=\frac{2288119159290}{40353607}$

```
133033181479770  282475249
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{10}}{10^n}=\frac{133033181479770}{282475249}$

```
9314805106797    2164802
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{11}}{10^n}=\frac{9314805106797}{2164802}$

```
8508128338528410 1977326743
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{12}}{10^n}=\frac{8508128338528410}{1977326743}$

```
44866413819364159290 96889010407
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{13}}{10^n}=\frac{44866413819364159290}{96889010407}$

```
521714270564789113110 96889010407
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{14}}{10^n}=\frac{521714270564789113110}{96889010407}$

NB. Avec les nombres complexes, on a la précision du flottant

```
    3 Z 1r3j2r5
_3.51392726080866j_2.30843141245914
```
NB. avec P 15 (15 chiffres demandés)

On a donc obtenu : $\sum_{n=1}^{\infty}n^3(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i)^n$ = -(3.51392726080866+2.30843141245914•i)

où i=$\sqrt{-1}$

```
    5x Z 4r7j1r2
337.092286449731j468.040682330732
```

On a obtenu : $\sum_{n=1}^{\infty}n^5(\frac{4}{7}+\frac{1}{2}i)^n=337.092286449731+468.040682330732\bullet i$

où $i=\sqrt{-1}$

4) **<u>Z-Séries</u>** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ **<u>où</u>** $a_n=\sum_{p=0}^{k}b_p n^p$ **(<u>polynôme de degré k de la variable n</u>)**

En J : (b_p entiers ou rationnels)

```
ZSerie =:  4  :  '+/x*(i.#x) Z y' "1  0
```

<u>Utilisation</u> : b_0 b_1 b_2…b_k ZSerie x ⇔ **calcul de** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ **où** $a_n=\sum_{p=0}^{k}b_p n^p$

Ex :

```
    1 0 2r3 17 _4  ZSerie  0.2
6.9296875
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{3}n^2+17n^3-4n^4)x^n$

NB. pour $x=0.2$ (en flottant)

```
    2 x: 1 0 2r3 17 _4x  ZSerie  1r5
887 128
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{3}n^2+17n^3-4n^4)\frac{1}{5^n}=\frac{887}{128}$

```
    x: 2r3 5r2 8 _5 0 77r8 ZSerie 3r4
```
NB. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3}+\frac{5}{2}n+8n^2-5n^3+\frac{77}{8}n^5)x^n$

```
4067719r2
```

NB. pour $x = 3/4$

```
    2  x: 2r3 5r2 8 _5 0 77r8  ZSerie 3r4
4067719  2
```

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{3}n^2+17n^3-4n^4)\frac{3^n}{4^n}=\frac{4067719}{2}}$

x peut être très voisin de 1 :

```
    2  x: 5r13 7r5  _4r11 0  45r8 ZSerie  131r132
15924770763083  3
```

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{5}{13}+\frac{7}{5}n-\frac{4}{11}n^2+\frac{45}{8}n^4)(\frac{131}{132})^n=\frac{15924770763083}{3}}$

```
    2 x: 4 3 _2 5x  ZSerie  _1r3 1r5 111r113 7777r7780
              _161    128
```

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(4+3n-2n^2+5n^3)(\frac{-1}{3})^n=\frac{-161}{128}}$

```
               703    128
```

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(4+3n-2n^2+5n^3)\frac{1}{5^n}=\frac{703}{128}}$

```
      2354485935        8
```

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(4+3n-2n^2+5n^3)(\frac{111}{113})^n=\frac{2354485935}{8}}$

```
135580525014816 9       1
```

NB. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(4+3n-2n^2+5n^3)(\frac{7777}{7780})^n=1355805250148169}$

```
    2  x: 1  8 _4r7  0  2r3  5  ZSerie   1r21 1r6 73r79 780r781
         1027255513785    813658469263
                 65411            3125
         1005103180869             406
 1356448083297202436 16              1
```

```
    1 8 _4r7 0 2r3 5  ZSerie  1r75j1r21
_0.294050877885681j0.773528681680336
```

NB. variable complexe
NB. résultat approché

```
    2 x: 1 22r7 3r11 4r13   ZSerie  59r111  58r113  57r115
20544550452937  913879794515
 4622580504551  242860204237
17047651035660  104637537810
```

```
    2 x:  56r11  8r7  23r5  ZSerie  73r74  76r79  87r89
1408860434   385
 331478788  2079
 302619756   385
```

Remarque : les couples d'entiers "**étendus**" (*numérateur, dénominateur*) calculés avec **2 x:** fournissent des **résultats** **(***rationnels***)** **exacts**.

Les coefficients polynômiaux peuvent être complexes mais la précision sera uniquement celle du flottant :

```
    ,. 2 3j1 4j_1 2j3 Serie 1r2 1r5j1r3 1r1000
                 84j74
 _4.937138222602262j_0.482562186106509
0.0110401012063676j0.00302207518035562
```

5) Z-Fonction : expression polynômiale d'une Z-Serie

Nous avons vu qu'une Z-Série est le développement de Mac-Laurin d'une Z-Fonction qui est elle-même une fonction rationnelle de la variable x. Plus précisément, c'est un polynôme de la variable $y = \frac{x}{1-x}$. Nous avons démontré précédemment le théorème suivant :

$$\boxed{\begin{pmatrix} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad |x|<1 \\ a_n = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x) = (\frac{x}{1-x}) \sum_{j=0}^{k} c_j (\frac{x}{1-x})^j \\ c_j = \sum_{p=j}^{k} b_p d_p^j \end{pmatrix}}$$

En J :

```
   CCC =: d/~@i.@#+/ .*]        NB. Calcul des c_j en fonction des b_j
  EXEC =: ".@(1!:2&2)           NB. Affiche et exécute une chaîne de caractères
NB. Création du pro-verbe d'une Z-Fonction :
   ZFT =: 4 : 'x,'' =: (*'',(":CCC y),'' &p.)@(%-.)'''
```

Utilisation :

```
    CCC 1 2 3 4x                NB. Les b_j sont transformés en
10 39 54 24                     NB.     c_j

    CCC 2r3 _1r2 0 2
13r6 27r2 24 12

    CCC 2r3 1r5 0 _3r2 4 1
131r30 807r10 362 621 456 120


    EXEC '45+67*AAAA=.28'       NB. Chaîne calculable
45+67*AAAA=.28                  NB. Affichage
1921                            NB. Exécution
```

Création du pro-verbe FIFI (***Z-Fonction*** *ayant le développement d'une* ***Z-Série***) :

```
    EXEC 'FIFI' ZFT 1 2 3 4x        NB. ZFT crée une chaîne exécutée
FIFI =: (*10 39 54 24 &p.)@(%-.)    NB. par EXEC ce qui crée FIFI
```

Vérification :

```
        1 2 3 4x ZSerie 1r3
    23
        FIFI 1r3
    23
```

On vient de trouver : $$\sum_{n=1}^{\infty}(1+2n+3n^2+4n^3)x^n = FIFI(x) = y\left[10+39y+54y^2+24y^3\right] \quad \text{avec } y=\frac{x}{1-x}$$ Ft rationnelle de x

```
        EXEC 'JOJO' ZFT 1r2 2r3 _5r2 1 4
    JOJO =: (*11r3 361r6 207 246 96 &p.)@(%-.)
```

On trouve ici : $$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}n-\frac{5}{2}n^2+n^3+4n^4)x^n = jojo(x) = y\left[\frac{11}{3}+\frac{361}{6}y+207y^2+246y^3+96y^4\right] \quad \text{où } y=\frac{x}{1-x}$$

Vérification :

```
        1r2 2r3 _5r2 1 4 ZSerie 1r2 1r3 1r5
    3677r6 489r8 3443r384
        JOJO 1r2 1r3 1r5
    3677r6 489r8 3443r384
```

VI) Conclusions

L'objectif annoncé est atteint :

$$Z_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \sum_{j=0}^{k} S_{k+1}^{j+1} j!\, y^{j+1} = \sum_{j=0}^{k} d_k^j y^{j+1} \quad ; \quad d_k^j = S_{k+1}^{j+1} j! = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i} C_j^i (1+i)^k$$

(polynômes à coefficients entiers ou rationnels de la variable y)

$$\text{avec} \quad y=\frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad |x|<1 \quad \forall k\in \mathrm{N}$$

De plus : $$a_n = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{k} b_p Z_p(x) \quad \textbf{(Z-Séries)}$$

Expression de la **Z-Fonction** ayant pour développement de Mac-Laurin une **Z-Série** donnée :

$$\begin{pmatrix} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad |x|<1 \\ a_n = \sum_{j=0}^{k} b_j n^j \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(x) = (\frac{x}{1-x})\sum_{j=0}^{k} c_j (\frac{x}{1-x})^j \\ c_j = \sum_{p=j}^{k} b_p d_p^j \end{pmatrix}$$

Dans ces expressions, y, y^2, y^3,…, y^k sont des ***fonctions rationnelles de la variable*** x (quotients de 2 polynômes) ; il est donc de même des $Z_k(x)$ et des fonctions égales aux séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ où $a_n = \sum_{p=0}^{k} b_p n^p$ avec les b_p rationnels.

Ces fonctions (*polynômes à coefficients entiers de la variable* y) prennent des valeurs rationnelles quand x est rationnelle (*donc également* y).

Les nombres d_k^j sont des entiers >0 facilement calculables avec le verbe **d.**

Leur **valeur exacte** peut donc s'écrire sous forme d'un **quotient de 2 entiers** (*éventuellement* ***"étendus"*** *en* ***J***).

Avec ce procédé, on cesse d'être tributaire de la "*vitesse de convergence d'une série*", puisqu'on lui substitue le simple calcul d'un polynôme.

La programmation en **J** est écrite ici sous forme "explicite" comme en **APL** "traditionnel". Elle doit se transposer sans difficulté en **APL** (*sous réserve de l'utilisation des* ***entiers étendus***).

Un nombre limité d'exemples de **Z-Séries** et **Z-Fonctions** ont été calculés « exactement ». Il était possible d'en ajouter des dizaines, des centaines d'autres. Le lecteur s'en chargera !

Ah! J'allais oublier l'expression : ***J*** comme "***JJJJ***ÉNIAL"

(avec un ***"J"*,** comme ***J***oie)