Tirages aléatoires uniformes et gaussien

par Charles Hubert

Généralités

On décrit ici des fonctions qui effectuent des tirages aléatoires uniformes dans un intervalle, sur un cercle, dans un disque (limité par un cercle), sur une sphère et dans une boule (limitée par une sphère), et des tirages gaussiens. Conventionnellement les majuscules désignent des variables aléatoires, les minuscules désignent des variables ordinaires.

Pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle [a,b], pouvant être infini, on définit sa fonction de répartition f(x) par la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :

```
f(x) = prob(X≤x)  =>  f(x)∊[0,1]
```

Si cette fonction f(x) est dérivable, sa dérivée f'(x) est la densité de probabilité de X ; alors f'(x)dx est la probabilité que X soit dans l'élément de longueur dx centré sur x.

La fonction de répartition est croissante ; si on fait le changement de variables

```
u = f(x)    U = f(X)
```

on voit que

```
prob(U≤u) = prob(f(X)≤f(x)) = prob(X≤x) = f(x) = u
```

ce qui montre que U est distribuée uniformément dans l'intervalle [0,1] ; sa densité de probabilité est 1.

Si on sait programmer la réciproque f^{-1} de f, on en déduit un moyen de générer des tirages de fonction de répartition f : on tire des valeurs U uniformément réparties dans [0,1] et on calcule les valeurs

$$X = f^{-1}(U)$$

Voyons des applications.

Tirage uniforme dans un intervalle

On sait que la primitive APL "?" tire des valeurs uniformément réparties dans l'ensemble des n premiers entiers naturels. En prenant n très grand et en divisant par n les valeurs tirées on ramène ces valeurs à l'intervalle [0,1]. En multipliant par a-b et en retranchant de a on ramène ces valeurs à [a,b].

La fonction qui fait ce tirage est

```
X←dim Xunif a,b
```

le résultat "X" a pour dimension "dim" et est tiré dans [a,b] ou [b,a] ; b vaut 0 par défaut.

Tirage uniforme sur un cercle

Sur un cercle de rayon r et de centre (x,y), on tire des valeurs Θ uniformément réparties dans $[-\pi,+\pi]$ et on calcule

$$X = x + r \cos \Theta \qquad Y = y + r \sin \Theta$$

La fonction qui fait ce tirage est

```
X←dim Xcercle r,x,y
```

le résultat "X" a pour dimension "dim,2" ; x et y valent 0 par défaut.

Tirage uniforme dans un disque

Dans un disque de rayon 1 et de centre (0,0) la densité de probabilité est $1/\pi$. En coordonnées polaires, l'élément d'aire étant $r\, dr\, d\theta$, la probabilité de cet élément d'aire s'écrit

$$\frac{r\, dr\, d\Theta}{\pi} = 2\, r\, dr \times \frac{d\Theta}{2\pi}$$

C'est le produit d'une différentielle en r par une différentielle en θ et les bornes des deux variables sont indépendantes ; les variables R et Θ sont donc indépendantes. Θ est uniformément répartie dans $[-\pi,+\pi]$. La fonction de répartition de R est

$$\int_0^r 2\, t\, dt = r^2 \qquad \text{on pose} \qquad U = R^2 \;\Rightarrow\; R = \sqrt{U}$$

On tire donc des valeurs uniformément réparties U dans [0,1], Θ dans $[-\pi,+\pi]$ et pour un disque de rayon a et de centre (x,y) on calcule

$$R' = a\sqrt{U} \qquad X = x + R'\cos \Theta \qquad Y = y + R'\sin \Theta$$

La fonction qui fait ce tirage est

```
X←dim Xdisque a,x,y
```

le résultat "X" a pour dimension "dim,2" ; x et y valent 0 par défaut.

Tirage uniforme sur une sphère

Sur une sphère de rayon 1 et de centre (0,0,0) la densité de probabilité est $1/4\pi$. En coordonnées polaires, l'élément d'aire étant $\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$, la probabilité de cet élément d'aire s'écrit

$$\frac{\cos\Theta\, d\Theta\, d\varphi}{4\pi} = \frac{\cos\Theta\, d\Theta}{2} \times \frac{d\varphi}{2\pi}$$

C'est le produit d'une différentielle en θ par une différentielle en φ et les bornes des deux variables sont indépendantes ; les variables Θ et Φ sont donc indépendantes. Φ est uniformément répartie dans $[-\pi,+\pi]$. La fonction de répartition de Θ est

$$\int_{-\pi/2}^{\Theta} \frac{\cos t \, dt}{2} = \frac{\sin \Theta + 1}{2} \qquad \text{on pose} \qquad S = \sin \Theta$$

$(S+1)/2$ est donc uniformément répartie dans $[0,1]$ et S dans $[-1,+1]$. Les coordonnées cartésiennes étant

$$\cos \Theta \cos \Phi \qquad \cos \Theta \sin \Phi \qquad \sin \Theta$$

il n'est pas nécessaire de calculer Θ. Pour une sphère de rayon r et de centre (x,y,z) on tire Φ uniformément répartie dans $[-\pi,+\pi]$ et S dans $[-1,+1]$, puis on calcule

$$C = r\sqrt{1 - S^2}$$

$$X = x + C \cos \Phi \qquad Y = y + C \sin \Phi \qquad Z = z + rS$$

La fonction qui fait ce tirage est

```
X←dim Xsphere r,x,y,z
```

le résultat "X" a pour dimension "dim,3" ; x, y et z valent 0 par défaut.

Tirage uniforme dans une boule

Dans une boule de rayon 1 et de centre (0,0,0) la densité de probabilité est $3/4\pi$. En coordonnées polaires, l'élément de volume étant $r^2 \cos \Theta \, dr \, d\Theta \, d\varphi$, la probabilité de cet élément de volume s'écrit

$$\frac{3}{4\pi} r^2 \cos \Theta \, dr \, d\Theta \, d\varphi = 3r^2 dr \times \frac{\cos \Theta \, d\Theta}{2} \times \frac{d\varphi}{2\pi}$$

C'est le produit de trois différentielles en r, en Θ et en φ et les bornes des trois variables sont indépendantes ; les variables R, Θ et Φ sont donc indépendantes. Φ est uniformément répartie dans $[-\pi,+\pi]$ et S dans $[-1,+1]$. La fonction de répartition de Θ est

$$\int_{-\pi/2}^{\Theta} \frac{\cos t \, dt}{2} = \frac{\sin \Theta + 1}{2} \qquad \text{on pose} \qquad S = \sin \Theta$$

La fonction de répartition de R est

$$\int_{0}^{r} 3t^2 \, dt = r^3 \qquad \text{on pose} \qquad U = R^3 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{U}$$

On tire donc des valeurs uniformément réparties, S dans

[-1,+1], Φ dans [$-\pi$,$+\pi$], U dans [0,1]. Pour une sphère de rayon a et de centre (x,y,z) on calcule

$$R = a\sqrt[3]{U} \qquad C = R\sqrt{1 - S^2}$$

$$X = x + C \cos \Phi \qquad Y = y + C \sin \Phi \qquad Z = z + RS$$

La fonction qui fait ce tirage est

```
X←dim Xboule a,x,y,z
```

le résultat "X" a pour dimension "dim,3" ; x, y et z valent 0 par défaut.

Tirage gaussien

La fonction de répartition d'une variable gaussienne normalisée X, c'est-à-dire de moyenne 0 et d'écart-type 1, est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp \frac{-t^2}{2}\, dt$$

ce n'est pas une combinaison de fonctions mathématiques élémentaires ; son inversion n'est pas facile.

On évite cette difficulté en considérant deux variables gaussiennes normalisées X et Y indépendantes. La densité de probabilité de (X,Y) est donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-y^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \exp \frac{-x^2 - y^2}{2}$$

On passe alors en coordonnées polaires où l'élément d'aire est r dr dθ ; la probabilité de cet élément d'aire est alors

$$\frac{1}{2\pi} \exp \frac{-r^2}{2}\, r\, dr\, d\theta = \exp \frac{-r^2}{2}\, r\, dr \times \frac{d\theta}{2\pi}$$

C'est le produit de deux différentielles en r et en θ et les bornes des deux variables sont indépendantes ; les variables R et Θ sont donc indépendantes. Θ est uniformément répartie dans [$-\pi$,$+\pi$]. La fonction de répartition de R est

$$\int_{0}^{r} \exp \frac{-t^2}{2}\, t\, dt = 1 - \exp \frac{-r^2}{2}$$

on pose $\qquad U = \exp \frac{R^2}{-2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{-2 \log U}$

et 1-U est uniformément répartie dans [0,1[, donc U l'est dans]0,1] ; il faut que U ne puisse jamais être nul.

Pour une variable gaussienne de moyenne m et d'écart-type σ on tire Θ uniformément répartie dans [$-\pi$,$+\pi$] et U dans]

0,1]. Puis on calcule

$$R = \sigma\sqrt{-2 \log U} \quad X = m + R \cos \Theta \quad Y = m + R \sin \Theta$$

et on fusionne X et Y en un seul tableau.

La fonction qui fait ce tirage est

```
X←dim Xgaus sig,m
```

le résultat "X" a pour dimension "dim", pour écart-type sig et pour moyenne m ; m vaut 0 par défaut.

Les fonctions

```
    ∇  x←d Xunif a;⎕io;g
[1]   ⍝∇ x←dim Xunif a
[2]   ⍝∇ x←tirage uniforme de dimension dim dans l'intervalle 2↑a
[3]    ⎕io←0
[4]    x←a[0]-(?d⍴g)×(-/a←2↑,a)÷g←2*53
    ∇
    ∇  z←d Xcercle a;⎕io;g;s
[1]   ⍝∇ x←dim Xcercle a
[2]   ⍝∇ x←tirage uniforme de dimension dim sur le cercle
[3]   ⍝∇   de rayon 1↑a et de centre 1↓3↑a
[4]    ⎕io←0 ⋄ a←3↑,a ⋄ d←,d
[5]    s←(d,2)⍴a[0]×⍉ 2 1 ∘.○○¯1+(?(×/d)⍴g)÷0.5×g←2*53
[6]    z←s+(⍴s)⍴a[1 2]
    ∇
    ∇  z←d Xdisque a;⎕io;g;s
[1]   ⍝∇ x←dim Xdisque a
[2]   ⍝∇ x←tirage uniforme de dimension dim dans le disque
[3]   ⍝∇   de rayon 1↑a et de centre 1↓3↑a
[4]    ⎕io←0 ⋄ a←3↑,a ⋄ d←,d
[5]    s←(?((×/d),2)⍴g)÷g←2*53
[6]    s[;1]←a[0]×s[;1]*0.5
[7]    s←(d,2)⍴s[; 1 1]×⍉ 2 1 ∘.○○¯1+2×s[;0]
[8]    z←s+(⍴s)⍴a[1 2]
    ∇
    ∇  z←d Xsphere a;⎕io;g;r;s
[1]   ⍝∇ x←dim Xsphere a
[2]   ⍝∇ x←tirage uniforme de dimension dim sur la sphère
[3]   ⍝∇   de rayon 1↑a et de centre 1↓4↑a
[4]    ⎕io←0 ⋄ a←4↑,a ⋄ d←,d
[5]    s←¯1+(?((×/d),2)⍴g)÷0.5×g←2*53
[6]    r←a[0]×0○s[;,1]
[7]    s←(d,3)⍴(r[; 0 0]×⍉ 2 1 ∘.○○s[;0]),a[0]×s[;1]
[8]    z←s+(⍴s)⍴a[1 2 3]
    ∇
    ∇  z←d Xboule a;⎕io;g;s
[1]   ⍝∇ x←dim Xboule a
[2]   ⍝∇ x←tirage uniforme de dimension dim dans la boule
[3]   ⍝∇   de rayon 1↑a et de centre 1↓4↑a
[4]    ⎕io←0 ⋄ a←4↑,a ⋄ d←,d
[5]    s←?((×/d),3)⍴g←2*53
[6]    s←s÷(⍴s)⍴g× 0.5 0.5 1
[7]    s[; 0 1]←¯1+s[; 0 1]
[8]    s[;2]←a[0]×s[;2]*÷3
[9]    s[; 1 2]←s[; 2 2]×s[;1],0○s[;,1]
[10]   s←(d,3)⍴(s[; 2 2]×⍉ 2 1 ∘.○○s[;0]),s[;1]
[11]   z←s+(⍴s)⍴a[1 2 3]
    ∇
```

```
    ∇  z←d Xgaus a;⎕io;g;s
      ⍝∇ x←dim Xgaus a
      ⍝∇ x←tirage gaussien de dimension dim
      ⍝∇    (2↑a) = ecartType , moyenne
       ⎕io←0 ⋄ a←2↑,a
       s←(1+?((⌈0.5××/d),2)⍴g)÷g←2*53
       s[;1]←a[0]×(¯2×⍟s[;1])*0.5
       s←s[; 1 1]×⍉ 2 1 ∘.○¯1+2×s[;0]
       z←a[1]+d⍴s
    ∇
```