SÉRIES DE FOURIER

R.Coquidé 10/01/2024

TABLE DES MATIÈRES

I) RÉSULTATS MATHÉMATIQUES GÉNÉRAUX

(on suppose implicitement que toute intégrale citée est convergente)

Définitions

On nomme **« polynôme trigonométrique de degré n »** toute expression de la forme :

$$\boxed{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \{a_k \cos(n\theta)+b_k \sin(n\theta)\}}$$

On nomme **« série trigonométrique »** toute expression de la forme :

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \{a_k \cos(n\theta)+b_k \sin(n\theta)\}}$$

où a_k, b_k, c_k sont réels ou complexes et θ variable réelle (angle exprimé en radians)

Ces polynômes et séries sont périodiques de période **2π**

θ est souvent noté wt où $w=\frac{2\pi}{T}$ avec $T>0$ et t variable réelle (souvent le temps)

⇒ ***T*** est alors la période des séries et polynômes trigonométriques

Propriétés des polynômes trigonométriques

Tout polynôme trigonométrique de degré ***n*** et période ***T*** peut s'écrire :

$$\boxed{P_{n,w}(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikwt}=\sum_{k=0}^{n} \{a_k \cos(kwt)+b_k \sin(kwt)\}} \quad \text{avec} \quad \boxed{w=\frac{2\pi}{T}}, \ T>0 \ \text{vérifiant :}$$

(tous les coefficients sont réels ou complexes)

$$\boxed{c_k=\frac{1}{T}\int_p^q P_{n,w}(t)\, e^{-ikwt}\, dt} \qquad \text{avec } q-p=T$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{T}\int_p^q P_{n,w}(t)\, dt} \qquad \boxed{a_k=\frac{2}{T}\int_p^q P_{n,w}(t)\cos(kwt)\, dt}$$

$$\boxed{b_k=\frac{2}{T}\int_p^q P_{n,w}(t)\sin(kwt)\, dt}$$

$$\boxed{c_k=\frac{1}{2}(a_k-i\,b_k)} \qquad \boxed{c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+i\,b_k)} \qquad \boxed{a_0=c_0} \qquad \boxed{a_k=(c_k+c_{-k})} \qquad \boxed{b_k=i(c_k-c_{-k})}$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_p^q |P_{n,w}(t)|^2 dt=\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(|a_k|^2+|b_k|^2)}$$

Si $\boxed{Q_{n,w}(t)=\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikwt}=\sum_{k=0}^{n} \{\alpha_k \cos(kwt)+\beta_k \sin(kwt)\}}$

est un 2e polynôme de degré ***n*** et de même période ***T*** **:**

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_p^q P_{n,w}(t)\overline{Q_{n,w}}(t)\, dt=\sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{\gamma_k}=a_0\overline{\alpha_0}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(a_k\overline{\alpha_k}+b_k\overline{\beta_k})}$$

Propriétés des séries trigonométriques

On dit qu'une propriété est vraie ***pp*** (***p****resque* ***p****artout*) si elle est vraie sauf en un nombre de points fini ou infini dénombrable.

Soit ***f(t)*** une fonction réelle ou complexe de la variable réelle ***t***, périodique de période ***T > 0,*** intégrable et de carré intégrable sur un intervalle quelconque ***[p,q]*** de longueur ***T,*** continue ***pp*** ainsi que sa dérivée première, sans asymptote verticale.

On associe à ***f(t)*** une série trigonométrique ***fSF(t)*** baptisée «***Série de Fourier de f(t)***» :

$$\boxed{fSF(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikwt}=\sum_{k=0}^{\infty}\{a_k\cos(kwt)+b_k\sin(kwt)\}}$$ avec $$\boxed{w=\frac{2\pi}{T}}$$ **, *T* > 0** vérifiant **:**

(Tous les coefficients sont réels ou complexes)

$$\boxed{c_k=\frac{1}{T}\int_p^q f(t)e^{-ikwt}dt}$$ avec ***q-p=T***

$$\boxed{a_0=\frac{1}{T}\int_p^q f(t)dt} \qquad \boxed{a_k=\frac{2}{T}\int_p^q f(t)\cos(kwt)dt} \qquad \boxed{b_k=\frac{2}{T}\int_p^q f(t)\sin(kwt)dt}$$

$$\boxed{c_k=\frac{1}{2}(a_k-i\,b_k)} \quad \boxed{c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+i\,b_k)} \quad \boxed{a_0=c_0} \quad \boxed{b_0=0} \quad \boxed{a_k=(c_k+c_{-k})} \quad \boxed{b_k=i(c_k-c_{-k})}$$

(Phénomène de ***Gibs*** démontré par ***Dirichlet***)

Pour tout ***t ϵ [p,q]*** on a ***fSF(t)=f(t)***	si ***f*** continue au temps ***t***
fSF(t)=(1/2).{f(t+)+f(t-)}	si ***f*** discontinue au temps ***t***

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_p^q |f(t)|^2dt=\frac{1}{T}\int_p^q |fSF(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)}$$ (***Parseval***)

Si $$\boxed{gSF(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{ikwt}=\sum_{k=0}^{\infty}\{\alpha_k\cos(kwt)+\beta_k\sin(kwt)\}}$$

est la série de Fourier d'une 2^e^ fonction ***g*** de même période ***T* :**

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_p^q f(t)\overline{g}(t)dt=\frac{1}{T}\int_p^q fSF(t)\overline{gSF}(t)dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\overline{\gamma_k}=a_0\overline{\alpha_0}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\overline{\alpha_k}+b_k\overline{\beta_k})}$$ (***Parseval***)

On utilise ici les notations suivantes (avec ***ϵ>0***) :

f(t+)$=\lim_{\varepsilon\to 0} f(t+\varepsilon)$ et ***f(t-)***$=\lim_{\varepsilon\to 0} f(t-\varepsilon)$; $\overline{z}$ =conjugué du nb complexe ***z***

Remarque : Dans le cas d'une ***Série de Fourier*** on a ***n***=∞ ce qui génère des problèmes de convergence. Les conditions d'intégrabilité et de continuité imposées à ***f(t)*** et ***f'(t)*** impliquent que ***fSF(t)*** représente bien la fonction ***f(t)*** (hors d'un nombre fini ou infini dénombrable de points de discontinuité situés dans un intervalle ***[p,q]*** de longueur ***T***) .

Ce sont des ***conditions suffisantes.*** On ne connaît pas de ***conditions nécessaires et suffisantes.***

Noyaux de Dirichlet
Définitition :

$\boxed{D_{n,w}(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikwt}}$ $\boxed{w=\frac{2\pi}{T}}$ $T>0$ n entier ≥ 0

Propriétés :

$\boxed{D_{n,w}(t)=\frac{1}{T}\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)wt\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}wt\right)}\right)}$ $\boxed{\int_{-T/2}^{+T/2} D_{n,w}(t)\,dt=1}$ $\boxed{D_{n,w}(0)=\frac{2n+1}{T}}$

Noyaux de Fejèr
Définition :

$\boxed{K_{n,w}(t)=\frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n} D_{k,w}(t)}$ (Moyenne de **Césaro** des ***n*+1** premiers noyaux de **Dirichlet**)

Propriétés :

$\boxed{K_{n,w}(t)=\frac{1}{(n+1)T}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}wt\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}wt\right)}\right)^2}$ $\boxed{\int_{-T/2}^{+T/2} K_{n,w}(t)\,dt=1}$ $\boxed{K_{n,w}(0)=\frac{n+1}{T}}$ $\boxed{K_{n,w}(t)\geq 0}$

Approximations :

Soit $fSF(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikwt}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kwt)+b_k\sin(kwt)\}$ la ***Série de Fourier*** de la fonction ***f(t).*** On nomme
« Série de Fourier-Dirichlet limitée à l'ordre n de f(t) » le polynôme trigonométrique

$\boxed{fSFD_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikwt}=\sum_{k=0}^{n}\{a_k\cos(kwt)+b_k\sin(kwt)\}}$

et ***« Série de Fourier-Fejèr limitée à l'odre n de f(t) »*** le polynôme trigonométrique

$\boxed{fSFF_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} fSFD_k(t)}$

(c'est la moyenne de ***Césaro*** des ***n+1*** premiers ***fSFD$_k$(t)***)

Propriétés des approximations :

$\boxed{fSFD_n(t)=\int_p^q f(x)D_n(t-x)\,dx=\int_p^q f(t-x)D_n(x)\,dx}$ **q-p=T**

$\boxed{fSFF_n(t)=\int_p^q f(x)K_n(t-x)\,dx=\int_p^q f(t-x)K_n(x)\,dx}$

On reconnaît la ***convolution*** de fonctions de période ***T=q-p sur l'intervalle [p,q] :***

$\boxed{fSFD_n=f\circ D_n}$ et $\boxed{fSFF_n=f\circ K_n}$

II) Th1 :

f et f' continues *pp* dans $[p,q]$ de période $T=q-p$ intégrables de carrés intégrables	$\Rightarrow$	Parmi les polynômes trigonométriques de degré au plus N, $fSF_N(t)$ est le plus proche de $f(t)$ au sens des moindres carrés (a_N) et (b_N) ont pour limites **0** quand $N\to\infty$ $Z_N=\int_p^q \{fSF_N(t)-f(t)\}^2 dt$ décroissante et de limite **0** si $N\to\infty$

Démonstration : on utilise les formules élémentaires suivantes (où $w=2\pi/T$)

(1) $\int_p^q \cos(nwt)\,dt=\int_p^q \sin(nwt)\,dt=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>0$

(2) $\int_p^q \sin(n_1wt)\cos(n_2wt)\,dt=0$, $\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$

(3) $\int_p^q \sin(n_1wt)\sin(n_2wt)\,dt=\int_p^q \cos(n_1wt)\cos(n_2wt)\,dt=0$, $\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $0<n_1\neq n_2>0$

(4) $\int_p^q \sin^2(nwt)\,dt=\int_p^q \cos^2(nwt)\,dt=\frac{T}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>0$

On cherche le polynôme trigonométrique $P_N(t)=a_0+\sum_{n=1}^{N}\{a_n\cos(nwt)+b_n\sin(nwt)\}$ qui

possède **2N+1** coefficients et minimise $Z_N=\int_p^q \{P_N(t)-f(t)\}^2 dt$ c'est-à-dire :

$$0=\frac{\partial Z_N}{\partial a_0}=2\int_p^q \{P_N(t)-f(t)\}\,dt=2\{a_0T-\int_p^q f(t)\,dt\} \Rightarrow \boxed{a_0=\frac{1}{T}\int_p^q f(t)\,dt}$$

$$0=\frac{\partial Z_N}{\partial a_n}=2\int_p^q \{P_N(t)-f(t)\}\cos(nwt)\,dt=2\{a_n\frac{T}{2}-\int_p^q f(t)\cos(nwt)\,dt\}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n=\frac{1}{T}\int_p^q f(t)\cos(nwt)\,dt}$$

$$0=\frac{\partial Z_N}{\partial b_n}=2\int_p^q \{P_N(t)-f(t)\}\sin(nwt)\,dt=2\{b_n\frac{T}{2}-\int_p^q f(t)\sin(nwt)\,dt\}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n=\frac{1}{T}\int_p^q f(t)\sin(nwt)\,dt}$$

Il est donc démontré que $P_N(t)=fSF_N(t)$ cqfd

La formule de Parseval $\frac{1}{T}\int_p^q |f(t)|^2 dt=\frac{1}{T}\int_p^q |fSF(t)|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)$

prouve que la série de terme général $(|a_k|^2+|b_k|^2)$ converge, donc ce terme général tend vers **0**.
On peut donc affirmer que, séparément, les suites (a_N) et (b_N) tendent vers **0.** cqfd

$$Z_N - Z_{N-1} = \int_p^q \{(fSF_N(t) - f(t))^2 - (fSF_{N-1}(t) - f(t))^2\} dt$$

$$= \int_p^q \{fSF_N(t) - fSF_{N-1}(t)\}\{fSF_N(t) + fSF_{N-1}(t) - 2f(t)\} dt$$

$$= \int_p^q \{a_N \cos(Nwt) + b_N \sin(Nwt)\}\{a_0 + \{a_N \cos(Nwt) + b_N \sin(Nwt) - 2f(t)\} + 2S\} dt$$

(où $S = 2\sum_{n=1}^{N-1} \{a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)\}$)

$$= \int_p^q \{a_N^2 \cos^2(Nwt) + b_N^2 \sin^2(Nwt) - 2a_N f(t) \cos(Nwt) - 2b_N f(t) \sin(Nwt)\} dt$$

$Z_N - Z_{N-1} = T\{\frac{1}{2}a_N^2 + \frac{1}{2}b_N^2 - a_N^2 - b_N^2\} = \frac{-T}{2}\{a_N^2 + b_N^2\} \leq 0$ et la suite (**Z_N**) est décroissante cqfd

$$Z_N = \int_p^q \{fSF_N(t) - f(t)\}^2 dt = \int_p^q \{fSF_N(t) - fSF(t)\}^2 dt = \int_p^q \{\sum_{n=N+1}^{\infty} \{a_n \cos(nwt) + b_n \cos(nwt)\}\}^2 dt$$

$Z_N = \frac{T}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty} \{a_n^2 + b_n^2\}$ c'est le reste pour la série convergente de **Parseval.**

Donc Z_N tend vers **0** quand N tend vers l'∞ cqfd

Th2 : Toute série trigonométrique $S(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k \cos(kwt) + b_k \sin(kwt)\}$ où $w=2\pi/T$

peut s'écrire $S(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(kwt - \varphi_k) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(kw(t - t_k))$

$S(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin(kwt - \psi_k) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin(kw(t - \tau_k))$ avec

$r_0 = a_0$, $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{a_k}{\cos(\varphi_k)} = \frac{b_k}{\cos(\psi_k)}$

$tg(\varphi_k) = \frac{b_k}{a_k}$ $tg(\psi_k) = -\frac{a_k}{b_k}$ $\varphi_k = kwt_k$ $\psi_k = kw\tau_k$

φ_k et ψ_k sont définis à ***$2j\pi$*** près ***j*** entier ***t_k et τ_k*** sont définis à ***$2jT$*** près

Si $0 \leq \varphi_k < 2\pi$ ***et*** $0 \leq \psi_k < 2\pi$ ils sont nommés ***« déphasages-retard »***

Si $0 \leq t_k < T$ ***et*** $0 \leq \tau_k < T$ ils sont nommés ***« temps de retard »***

De même ***pour tout polynôme trigonométrique*** (on remplace ∞ par ***N***)

Démonstration :

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kwt) + b_k \sin(kwt)\} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{\cos(kwt) + \frac{b_k}{a_k} \sin(kwt)\}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{\cos(kwt) + tg(\varphi_k) \sin(kwt)\}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\cos(\varphi_k)} \{\cos(kwt)\cos(\varphi_k) + \sin(\varphi_k)\sin(kwt)\} = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(kwt - \varphi_k)$$ cqfd

$$= r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k w (t - t_k)) \quad \text{cqfd}$$

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k w t) + b_k \sin(k w t)\} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \{\frac{a_k}{b_k} \cos(k w t) + \sin(k w t)\}$$

$$= r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \{\sin(k w t) - \cos(k w t) tg(\psi_k)\} = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\cos(\psi_k)} \{\sin(k w t) \cos(\psi_k) - \sin(\psi_k) \cos(k w t)\}$$

$$= r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin(k w t - \psi_k) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin(k w (t - \tau_k)) \quad \text{cqfd}$$

III) SÉRIES DE FOURIER OBTENUES À PARTIR DE SÉRIES ENTIÈRES

Période T

$w=2\pi/T$; r et T réels>0 ; $0 \le s \le 1$; p entier ≥ 0

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} s^n \cos(nwt)=\frac{1-s\cos(wt)}{1+s^2-2s\cos(wt)}}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} s^n \sin(nwt)=\frac{s\sin(wt)}{1+s^2-2s\cos(wt)}}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n \cos(nwt)=\frac{1+s\cos(wt)}{1+s^2+2s\cos(wt)}}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} s^n \sin(nwt)=\frac{s\sin(wt)}{1+s^2+2s\cos(wt)}}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\cos(nwt)=e^{r\cos(wt)}\cos(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\sin(nwt)=e^{r\cos(wt)}\sin(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^n}{n!}\cos(nwt)=e^{-r\cos(wt)}\cos(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n}{n!}\sin(nwt)=e^{-r\cos(wt)}\sin(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}\cos(2nwt)=ch(r\cos(wt))\cos(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}\sin(2nwt)=sh(r\cos(wt))\sin(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n}}{(2n)!}\cos(2nwt)=ch(r\sin(wt))\cos(r\cos(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^{2n}}{(2n)!}\sin(2nwt)=sh(r\sin(wt))\sin(r\cos(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos((2n+1)wt)=sh(r\cos(wt))\cos(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin((2n+1)wt)=ch(r\cos(wt))\sin(r\sin(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos((2n+1)wt)=ch(r\sin(wt))\sin(r\cos(wt))}$	$0 \le t \le T$
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin((2n+1)wt)=sh(r\sin(wt))\cos(r\cos(wt))}$	$0 \le t \le T$

Période T

w=2π/T ; T réel>0 ; p entier ≥ 0 ; $B_p(x)$ et $E_p(x)$ polynômes de **Bernoulli** et **Euler** de degré **p**

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nwt)}{n^{2p}}=(-1)^{p+1}(\frac{2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!})B_{2p}(\frac{t}{T})}$	**0 ≤ t ≤ T p entier > 0**
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nwt)}{n^{2p+1}}=(-1)^{p+1}(\frac{2^{2p}\pi^{2p+1}}{(2p+1)!})B_{2p+1}(\frac{t}{T})}$	**0 ≤ t ≤ T si p > 0** **0 < t < T si p = 0**
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((n+1/2)wt)}{(2n+1)^{2p}}=(-1)^{p}(\frac{\pi^{2p}}{4(2p-1)!})E_{2p-1}(\frac{t}{T})}$	**0 ≤ t ≤ T et p > 0**
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)wt)}{(2n+1)^{2p+1}}=(-1)^{p}(\frac{\pi^{2p+1}}{4(2p)!})E_{2p}(\frac{t}{T})}$	**0 ≤ t ≤ T si p > 0** **0 < t < T si p = 0**

Démonstrations :

$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$ **si |z| < 1 ; si** $z=se^{iwt}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}s^n e^{iwt}=\frac{1}{1-se^{iwt}}=\frac{(1-s\cos(wt))+is\sin(wt)}{1+s^2-2s\cos(wt)}\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}s^n\cos(nwt)=\frac{1-s\cos(wt)}{1+s^2-2s\cos(wt)}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}s^n\sin(nwt)=\frac{s\sin(wt)}{1+s^2-2s\cos(wt)}$ cqfd **si s → -s** ⇒

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^n\cos(nwt)=\frac{1+s\cos(wt)}{1+s^2+2s\cos(wt)}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}s^n\sin(nwt)=\frac{s\sin(wt)}{1+s^2+2s\cos(wt)}$ cqfd

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$ **z** complexe quelconque. Si $z=re^{iwt}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}e^{inwt}=e^{r(\cos(wt)+i\sin(wt))}\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}(\cos(nwt)+i\sin(nwt))=e^{r\cos(wt)}(\cos(r\sin(wt))+i\sin(r\sin(wt)))\Rightarrow$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\cos(nwt)=e^{r\cos(wt)}\cos(r\sin(wt))$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\sin(nwt)=e^{r\cos(wt)}\sin(r\sin(wt))$ cqfd

si r → -r ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{r^n}{n!}\cos(nwt)=e^{-r\cos(wt)}\cos(r\sin(wt))$ et

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{r^n}{n!}\sin(nwt)=e^{-r\cos(wt)}\sin(r\sin(wt))$ cqfd

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=ch(z)$ **z** complexe quelconque Si $z=re^{iwt}\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(2n)!}e^{i2nwt}=ch(re^{iwt})=ch(r\cos(wt)+i\sin(wt))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(2n)!}(\cos(wt)+i\sin(wt))=ch(r\cos(wt))ch(ir\sin(wt))+sh(r\cos(wt))sh(ir\sin(wt))$$

$= ch(r\cos(wt))\cos(r\sin(wt)) + i\, sh(r\cos(wt))\sin(r\sin(wt)) \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}\cos(2nwt) = ch(r\cos(wt))\cos(r\sin(wt))$ et

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}\sin(2nwt) = sh(r\cos(wt))\sin(r\sin(wt))$ cqfd si r $\rightarrow$ i r $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n}}{(2n)!}\cos(2nwt) = ch(r\sin(wt))\cos(r\cos(wt))$ et

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^{2n}}{(2n)!}\sin(2nwt) = sh(r\sin(wt))\sin(r\cos(wt))$ cqfd

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = sh(z)$ z complexe quelconque Si $z = re^{iwt}$ $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{inwt} = sh(re^{iwt}) = sh(r\cos(wt) + i\, r\sin(wt))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{inwt} = sh(re^{iwt}) = sh(r\cos(wt))\, ch(i\, r\sin(wt)) + ch(r\cos(wt))\, sh(i\, r\sin(wt))$$

$= sh(r\cos(wt))\cos(r\sin(wt)) + i\, ch(r\cos(wt))\sin(r\sin(wt)) \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos((2n+1)wt) = sh(r\cos(wt))\cos(r\sin(wt))$ **et**

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin((2n+1)wt) = ch(r\cos(wt))\sin(r\sin(wt))$ cqfd si $r \rightarrow i\, r \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos((2n+1)wt) = ch(r\sin(wt))\sin(r\cos(wt))$ et

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin((2n+1)wt) = sh(r\sin(wt))\cos(r\cos(wt))$ cqfd

Dans l’article « **Nombres et Polynômes de Bernoulli et Euler** » les 4 formules suivantes sont démontrées :
(les notations inversant les rôles de n et p)

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2p}}\right) = (-1)^{p+1}\left(\frac{2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!}\right) B_{2p}(x)$ si $\mathbf{0 \le x \le 1}$ $\mathbf{p > 0}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2p+1}}\right) = (-1)^{p+1}\left(\frac{2^{2p}\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) B_{2p+1}(x)$ si $\mathbf{0 \le x \le 1}$ **si p > 0 ,** $\mathbf{0 < x < 1}$ **si** $\mathbf{p = 0}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^{2p}}\right)=(-1)^{p}\left(\frac{\pi^{2p}}{4(2p-1)!}\right)E_{2p-1}(x)\quad \text{si } p \geq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^{2p+1}}\right)=(-1)^{p}\left(\frac{\pi^{2p+1}}{4(2p)!}\right)E_{2p}(x)\quad \text{si } \begin{array}{l} p\geq 1 \; et \; 0\leq x\leq 1 \\ p=0 \; et \; 0<x<1 \end{array}$$

Posons **x=t/T** ⇒ **πx=wt/2** il vient **:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nwt)}{n^{2p}}=(-1)^{p+1}\left(\frac{2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!}\right)B_{2p}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nwt)}{n^{2p+1}}=(-1)^{p+1}\left(\frac{2^{2p}\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)B_{2p+1}\left(\frac{t}{T}\right)$$

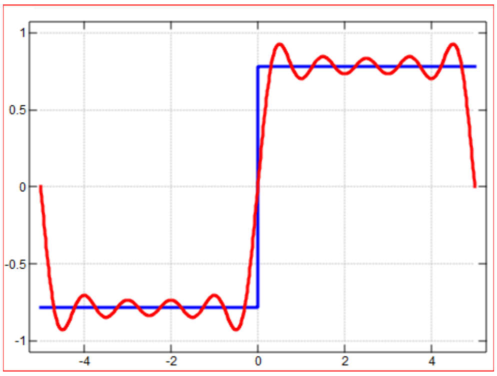
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((n+1/2)wt)}{(2n+1)^{2p}}=(-1)^{p}\left(\frac{\pi^{2p}}{4(2p-1)!}\right)E_{2p-1}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+1/2)wt)}{(2n+1)^{2p+1}}=(-1)^{p}\left(\frac{\pi^{2p+1}}{4(2p)!}\right)E_{2p}\left(\frac{t}{T}\right)\quad \text{cqfd}$$

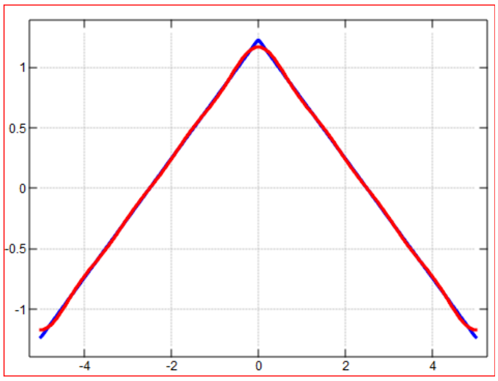
IV) PREMIERS EXEMPLES

```
        f1=:1r4p1**
        [AB1=. (f1 SF  _5  5) 9
0 0 0 0              0 0    0 0              0 0             0 0               0
0 1 0 0.333333 0 0.2 0 0.142857 0 0.111111 0 0.0909091 0
        f1s=:(AB1 FPT _5 5)"0
        'pensize 3' plot (];f1,:f1s)1000 sint _5 5
```

Mise en évidence du phénomène de Gibbs

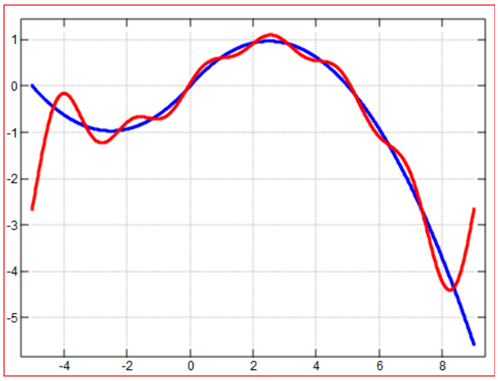



```
     f2=: _5  5&{{1r8p2-1r4p1*w*y**y[w=.2p1%T=.-/|.x}}"0 0

     [AB2=. (f2 SF  _5  5)8
0 1 0 0.111111 0 0.04 0 0.0204082 0
0 0 0 0             0 0      0 0                0
     f2s=:(AB2 FPT  _5  5)"0
     'pensize 3' plot (];f2,:f2s)1000 sint _5 5
```



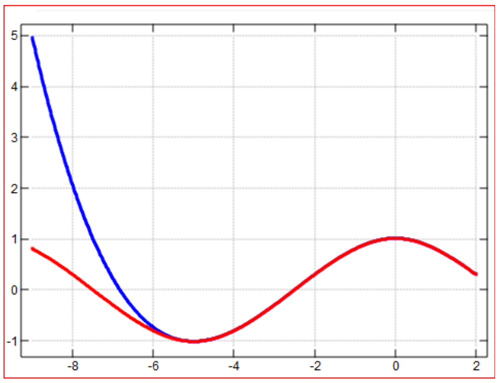

```
  f3=:14&{{(1r8p2*w*y)-((1r8p1**:w*y)**y)[w=.2p1%T=.x}}"0 0

  [AB3=. (f3 SF   _5   9)6
0 0 0 0              0 0        0 0                 0
0 1 0 0.037037 0 0.008 0 0.00291545 0
  f3s=:(AB3 FPT   _5  9)"0
  'pensize 3' plot (];f3,:f3s)1000 sint _5 9
```

phénomène de Gibbs aux extrémités de l'intervalle




```
    f4=:10&{{(1r96p4-*:1r4p1*w*y)+(*y)*1r24p1*(w*y)^3[w=.
2p1%T=.x}}"0 0
    [AB4=. (f4 SF _5  5) 8
0 1 0 0.0123457 0 0.0016 0 0.000416493 0
0 0 0 0                0 0          0 0                  0
    f4s=:(AB4 FPT  _5  5)"0
    'pensize 3' plot (];f4,:f4s)1000 sint _9 2
```

intervalle de définition [-5 5]
intervalle d'affichage   [-9 2]



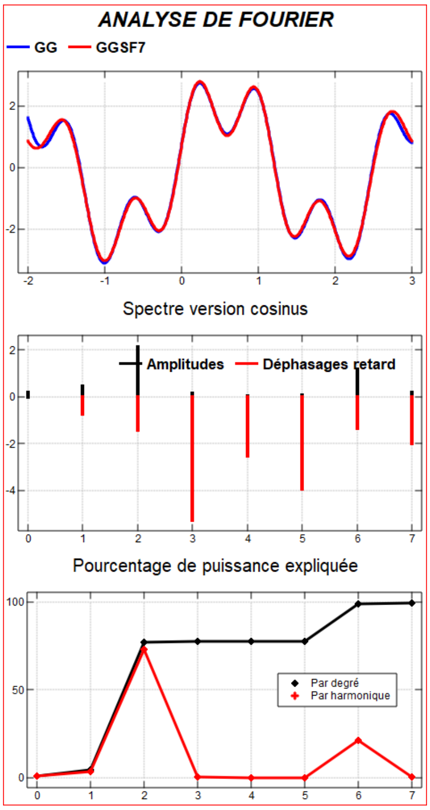
V) EXEMPLES PRATIQUES

```
GG=:(2.3*(1&o.)@(0.23+(2.35&*)))+(1.21*(1&o.)@(0.17+7.67&*))
((<'GG') ANALYSEDEFOURIER _2 3) 7
```

```
Série de Fourier ordre: 7  Intervalle: _2 3  Période: 5
Fonction: GG  Puissance: 3.11  Fonction crée: GGSF7
```

hd	0	1	2	3	4	5	6	7
a	_0.169	0.348	0.294	0.0813	_0.0262	_0.0434	0.271	_0.0674
b	0	0.306	2.11	_0.136	0.0183	_0.043	1.12	0.149
Ro	0.169	0.463	2.13	0.158	0.032	0.0611	1.15	0.163
FIC	0	_0.721	_1.43	_5.25	_2.53	_3.92	_1.33	_2
FIS	0	_5.43	_6.14	_3.68	_0.96	_2.35	_6.05	_0.425
Pah	0.0284	0.107	2.27	0.0125	0.000512	0.00187	0.666	0.0134
Prh	0.00914	0.0344	0.73	0.00403	0	0.0006	0.214	0.0043
Pad	0.0284	0.136	2.4	2.42	2.42	2.42	3.09	3.1
Prd	0.00914	0.0436	0.773	0.777	0.777	0.778	0.992	0.996

```
                 VARIABLES CREES :
 hd : numéro d'harmonique ou de degré de polynôme trigo
  a : coefficient de cosinus par harmonique (a=.0{AB)
  b : coefficient de sinus par harmonique   (b=.1{AB)
 Ro : amplitude par harmonique
FIC : déphasage retard pour la version cosinus
FIS : déphasage retard pour la version sinus
Pah : puissance absolue  expliquée par harmonique
Prh : puissance relative expliquée par harmonique
Pad : puissance absolue  expliquée par degré
Prd : puissance relative expliquée par degré
 Pf : puissance de la fonction
     Pour obtenir a et b écrire : a=.0{AB et b=.1{AB
```

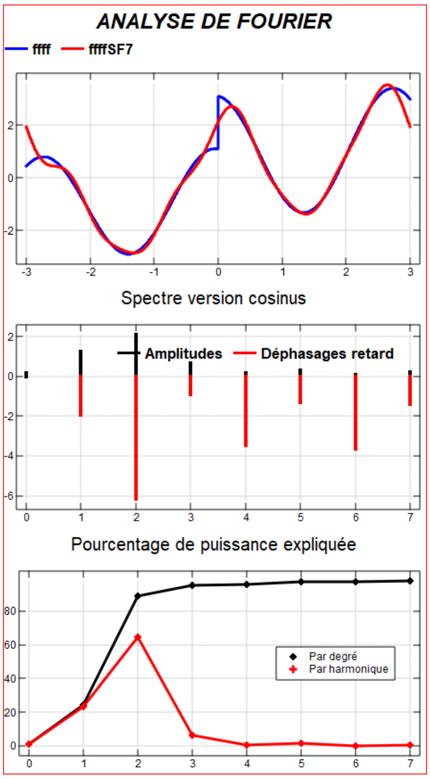



```
ffff=:*+(2.1*(2&o.)@(2.3&*))-(0.3*(1&o.)@(1.71&*))
((<'ffff') ANALYSEDEFOURIER _3 3) 7
```

```
Série de Fourier ordre: 7  Intervalle: _3 3  Période: 6
Fonction: ffff  Puissance: 3.33  Fonction crée: ffffSF7
```

hd	0	1	2	3	4	5	6	7
a	0.176	_0.444	2.06	0.407	_0.152	0.0842	_0.0545	0.0384
b	0	1.17	_0.262	0.507	_0.0524	0.294	_0.0314	0.208
Ro	0.176	1.25	2.08	0.65	0.161	0.306	0.0629	0.212
FIC	0	_1.93	_6.16	_0.895	_3.47	_1.29	_3.66	_1.39
FIS	0	_0.363	_4.59	_5.61	_1.9	_6	_2.09	_6.1
Pah	0.031	0.781	2.16	0.211	0.0129	0.0467	0.00198	0.0224
Prh	0.00929	0.234	0.648	0.0634	0.00387	0.014	0.000593	0.00673
Pad	0.031	0.812	2.97	3.18	3.2	3.24	3.24	3.27
Prd	0.00929	0.244	0.891	0.954	0.958	0.972	0.973	0.98

```
                 VARIABLES CREES :
 hd : numéro d'harmonique ou de degré de polynôme trigo
  a : coefficient de cosinus par harmonique (a=.0{AB)
  b : coefficient de sinus par harmonique   (b=.1{AB)
 Ro : amplitude par harmonique
FIC : déphasage retard pour la version cosinus
FIS : déphasage retard pour la version sinus
Pah : puissance absolue  expliquée par harmonique
Prh : puissance relative expliquée par harmonique
Pad : puissance absolue  expliquée par degré
Prd : puissance relative expliquée par degré
 Pf : puissance de la fonction
     Pour obtenir a et b écrire : a=.0{AB et b=.1{AB
```

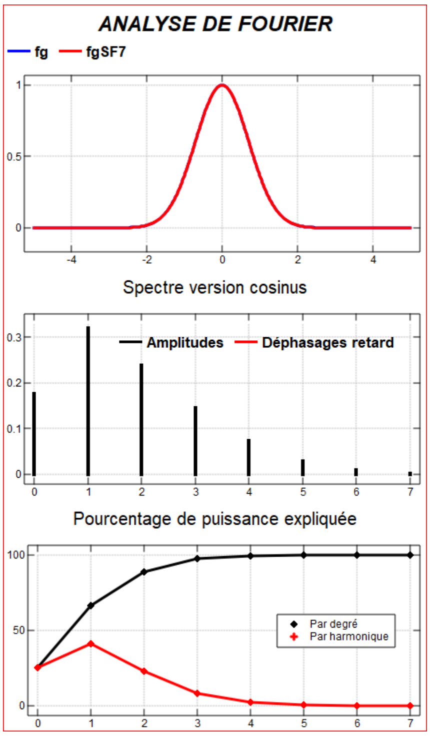


```
fg=:^@-@*:
((<'fg') ANALYSEDEFOURIER _5 5) 7
```

```
Série de Fourier ordre: 7  Intervalle: _5 5  Période: 10
Fonction: fg  Puissance: 0.125  Fonction crée: fgSF7
```

hd	0	1	2	3	4	5	6	7
a	0.177	0.321	0.239	0.146	0.0731	0.0301	0.0102	0.00281
b	0	0	0	0	0	0	0	0
Ro	0.177	0.321	0.239	0.146	0.0731	0.0301	0.0102	0.00281
FIC	0	0	0	0	0	0	0	0
FIS	0	_4.71	_4.71	_4.71	_4.71	_4.71	_4.71	_4.71
Pah	0.0314	0.0516	0.0285	0.0106	0.00267	0	0	0
Prh	0.251	0.412	0.228	0.0848	0.0213	0.00361	0	0
Pad	0.0314	0.083	0.112	0.122	0.125	0.125	0.125	0.125
Prd	0.251	0.662	0.89	0.975	0.996	1	1	1

```
              VARIABLES CREES :
 hd : numéro d'harmonique ou de degré de polynôme trigo
  a : coefficient de cosinus par harmonique (a=.0{AB)
  b : coefficient de sinus par harmonique    (b=.1{AB)
 Ro : amplitude par harmonique
FIC : déphasage retard pour la version cosinus
FIS : déphasage retard pour la version sinus
Pah : puissance absolue  expliquée par harmonique
Prh : puissance relative expliquée par harmonique
Pad : puissance absolue  expliquée par degré
Prd : puissance relative expliquée par degré
 Pf : puissance de la fonction
    Pour obtenir a et b écrire : a=.0{AB et b=.1{AB
```

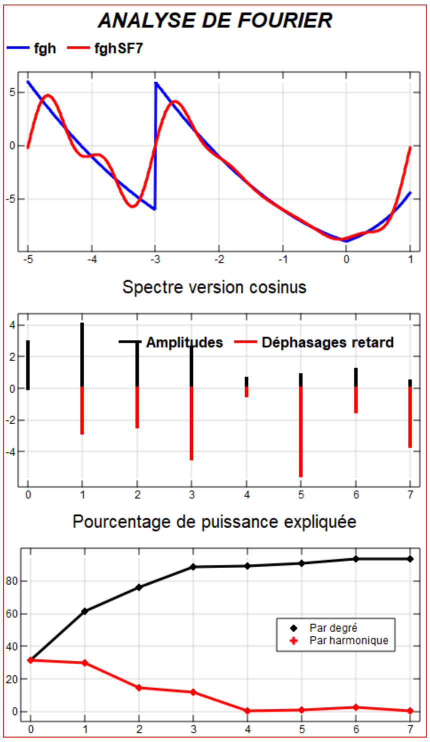



```
fgh=:_10+[:*:(*@(3&+))+|+(^@-@*:)@(_2&+)
((<'fgh') ANALYSEDEFOURIER _5 1) 7
```

```
Série de Fourier ordre: 7  Intervalle: _5 1  Période: 6
Fonction: fgh  Puissance: 27.1  Fonction crée: fghSF7
```

hd	0	1	2	3	4	5	6	7
a	_2.92	_3.78	_2.12	_0.755	0.588	0.605	0.121	_0.4
b	0	1.36	1.89	_2.46	0.265	_0.591	1.2	_0.219
Ro	2.92	4.02	2.84	2.57	0.645	0.846	1.21	0.457
FIC	0	_2.8	_2.41	_4.41	_0.424	_5.51	_1.47	_3.64
FIS	0	_1.23	_0.843	_2.84	_5.14	_3.94	_6.18	_2.07
Pah	8.55	8.09	4.04	3.31	0.208	0.358	0.726	0.104
Prh	0.315	0.298	0.149	0.122	0.00768	0.0132	0.0268	0.00384
Pad	8.55	16.6	20.7	24	24.2	24.6	25.3	25.4
Prd	0.315	0.614	0.763	0.885	0.892	0.906	0.932	0.936

```
              VARIABLES CREES :
 hd : numéro d'harmonique ou de degré de polynôme trigo
  a : coefficient de cosinus par harmonique (a=.0{AB)
  b : coefficient de sinus par harmonique    (b=.1{AB)
 Ro : amplitude par harmonique
FIC : déphasage retard pour la version cosinus
FIS : déphasage retard pour la version sinus
Pah : puissance absolue  expliquée par harmonique
Prh : puissance relative expliquée par harmonique
Pad : puissance absolue  expliquée par degré
Prd : puissance relative expliquée par degré
 Pf : puissance de la fonction
    Pour obtenir a et b écrire : a=.0{AB et b=.1{AB
```



Puissance d'une fonction **f** sur un intervalle **[p,q)**

f =: ^*1&o.

f PUISSANCE 1 5

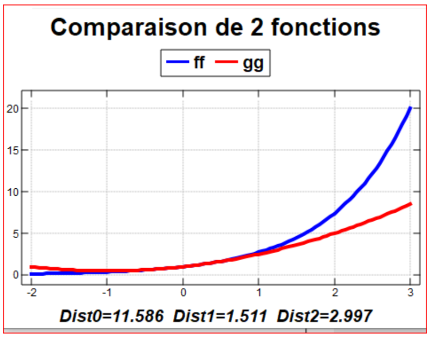
1552.44

ff =: ^ NB. e^x

gg =: 1 1 1r2&p. NB. $1+x+0,5x^2$ série de Mac Laurin ordre 2

(<'ff') COMPARAISON (<'gg') _2 3

11.5855 1.51084 2.99699



ff=:^ NB. e^x

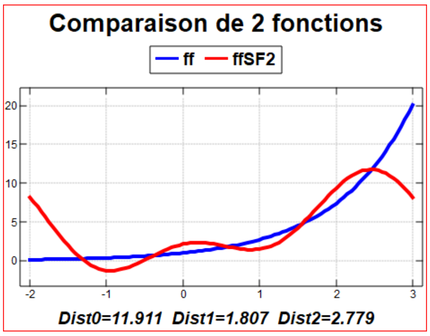
AB=. (ff SF _2 3) 2 NB. Coeff. série de Fourier ordre 2

ffSF2 =: (AB FPT _2 3)"0 NB. Fonction série de Fourier

(<'ff') COMPARAISON (<'ffSF2') _2 3

11.9107 1.80744 2.77906

Retourne les pseudo-distances d'ordre 0 (Max |f-fSF2|) sur [_2 3]
d'ordre 1 (intégrale de |f-fSF2| sur [_2 3])%5 5=longueur de l'intervalle
d'ordre 2 (intégrale de $|f\text{-}fSF2|^2$ sur $[\_2\ \ 3])^{1/2}$%5



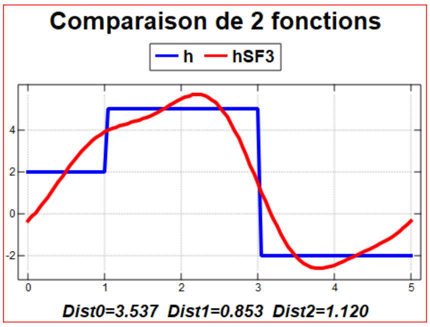
h=:2:+(3:*]>1:)-(7:*]>3:)

M=: (h SF 0 5) 3

hSF3=: (M FPT 0 5)"0

(<'h') COMPARAISON (<'hSF3') 0 5

3.53664 0.85294 1.11995



ABe

0.6 0.32 0.88 0.04 0.36 0.32 0.08 0.6 0.28 0.92
0 0.4 0.68 0.8 0.76 0.44 0.6 0.16 0.72 0.16

[ABs=.5 FPB ABe NB. filtre passe-bas

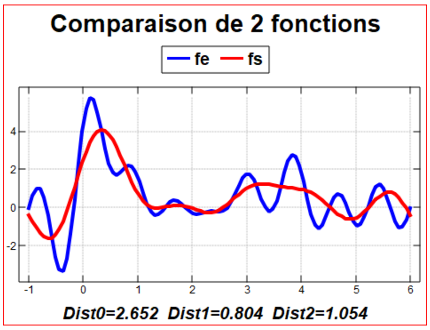
0.6 0.32 0.88 0.04 0.36 0.32
0 0.4 0.68 0.8 0.76 0.44

fe=:(ABe FPT _1 6)"0

fs=:(ABs FPT _1 6)"0

(<'fe') COMPARAISON (<'fs') _1 6

2.65161 0.804069 1.05376



L'application d'un filtre passe-bas est une méthode de lissage

ABe

0 0.1 2 0.1 3 8 4 0.2 _0.3
0 0.2 0.3 _0.1 5 7 2 0.1 0.5

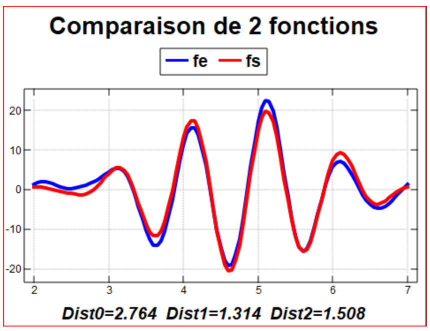
[ABs=. 4 6 FPBD ABe NB. Filtre passe-bande

0 0 0 0 3 8 4 0 0
0 0 0 0 5 7 2 0 0

fs=: ABs FPT 2 7"0 [. fe=: ABe FPT 2 7"0

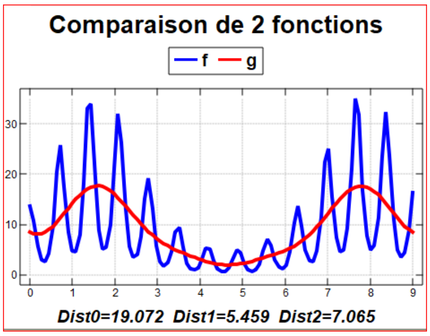
(<'fe') COMPARAISON (<'fs') 2 7

2.76437 1.3135 1.50831



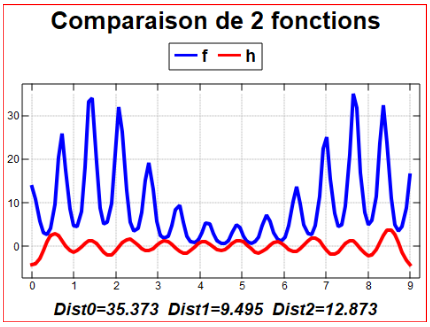
```
   f =: 5*^@((1&o.)+(2&o.)@(9&*))
   g =: (0 9;10)&( (4&FPB)  FILTRE  f )"0     NB. filtre passe-bas
   (<'f')  COMPARAISON  (<'g')  0 9
19.0721 5.45928 7.06478
```

La conjonction **FILTRE** applique directement à **f** (en passant implicitement par les matrices de coefficients) le filtre passe-bas **(4&FPB)** pour obtenir la fonction lissée **g.** Sur un intervalle de longueur égale à la période la fonction lissée **g** a même intégrale que **f**.

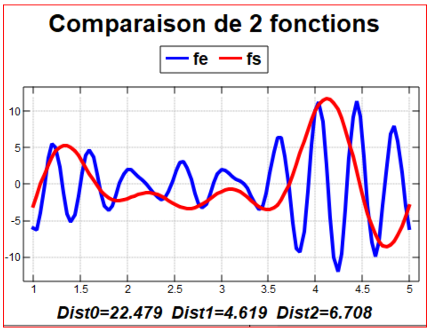


Lissage

```
   f =: 5*^@((1&o.)+(2&o.)@(9&*))
   h =: (0 9;10)&( (5&FPH)  FILTRE  f )"0     NB. idem filtre passe-haut
   (<'f')  COMPARAISON  (<'h')  0 9
35.3732 9.49499 12.8728
```

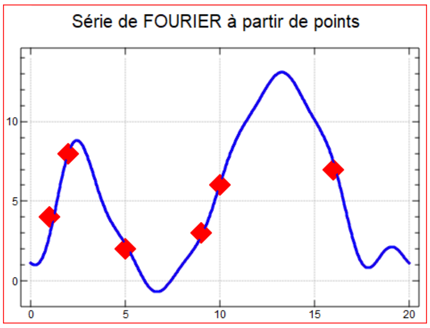



```
   ABe
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2   3 4 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 _1 2 3
   [ABs =. _7  FFREQ   ABe     NB. Baisse de 7 harmoniques
0 2   3 4 1
0 1 _1 2 3
   fs=: ABs FPT 1 5"0    [.   fe=: ABe FPT 1 5"0
   (<'fe')   COMPARAISON   (<'fs')  1  5
22.4789 4.61855 6.7082
```

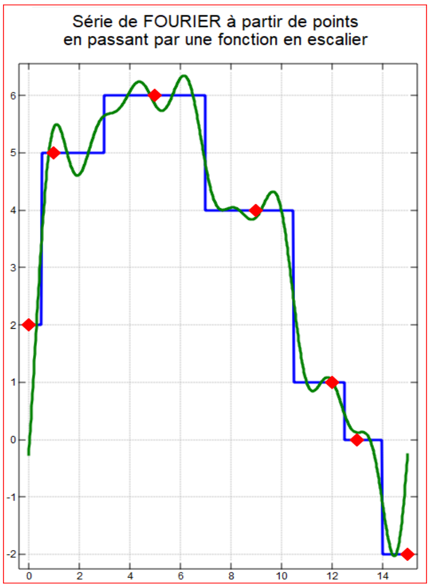



```
   X=.1 2 5 9 10 16  [  Y=.4 8 2 3 6 7

   [ AB=.  (X;Y)   XYSFPOL   (0 20;7)     NB. Fonction polynômiale
5.2398 _1.5486 _1.1601 _0.5792 _0.3383 _0.2202 _0.1544 _0.1140
0         _3.2788   4.3718   0.6697 _0.2523 _0.5045 _0.5626 _0.5572
   f =: (AB   FPT   0 20)"0
   pd  'title Série de FOURIER à partir de points'
   pd   'type line ; pensize 2 ; color blue'
   pd   (];f)1000 sint 0 20
   pd   'type marker ; color red ; markersize 2'
   pd   X;Y
   pd   'show'
```

La courbe n’est connue que par un nombre fini (n+1) de points (X;Y) . Elle est remplacée par la courbe polynômiale de degré n passant par ces (n+1) points. C’est cette fonction polynômiale qui est développée en série de Fourier.

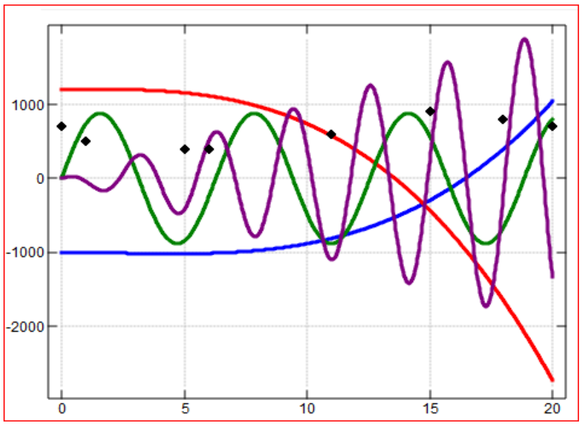


```
X=.0 1 5 9 12 13 15   [   Y=.2 5 6 4 1 0 _2

  f =: (X;Y) FESC "0         NB. Fonction en escalier
  AB =.  (f SF 0 15) 8       NB. Coeff. série de Fourier ordre 8
  g =: (AB FPT 0 15)"0       NB. Fonction série de Fourier
  pd 'new ; title Série de FOURIER à partir de points<br/>en passant par une fonction en escalier'
  pd 'type line ; pensize 3 ; color blue'
  pd (];f) 1000 sint 0 15
  pd 'type line ; pensize 3 ; color green'
  pd (];g)1000 sint 0 15
  pd 'type marker ; color red ; markersize 2'
  pd X;Y
  pd 'show'
```



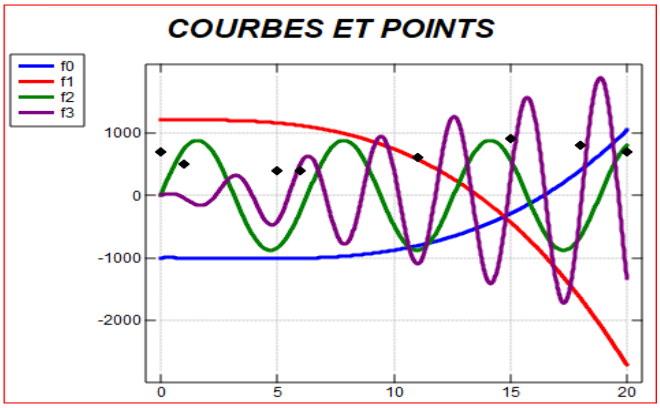

```
  f0=._1000 2 _3 0.4&p.

  f1=.1200 4 0 _0.5&p.
  f2=.880 * 1&o.
  f3=.100*]*(2&o.)@(2&*)
  X=.0 1 5 6 11 15 18 20
  Y=.700 500 400 400 600 900 800 700
          (f0`f1`f2`f3)  AFFXY  (X;Y)  0 20
```

forme monadyque

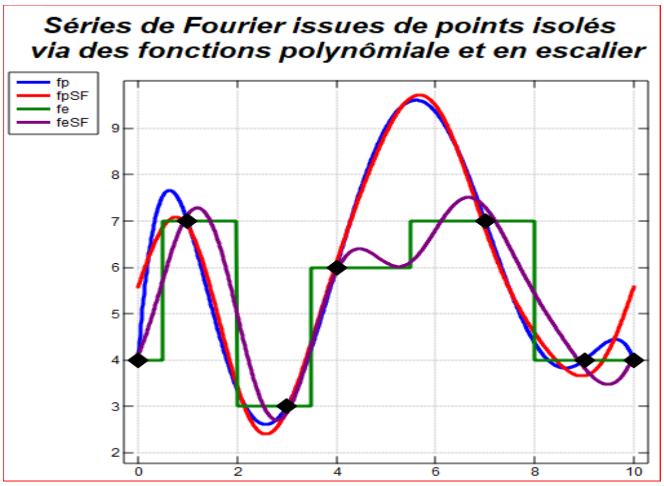


```
'COURBES ET POINTS'  (f0`f1`f2`f3)   AFFXY  (X;Y)  0 20
```

forme dyadique
avec un titre et indication des fonctions




```
 X=.0 1 3 4 7 9 10 [ Y=.4 7 3 6 7 4 4
 fp =: (X POLXY Y)&p.     NB. Fonction polynômiale
    AB=. (X;Y) XYSFPOL (0 10;4)       NB. et
 fpSF=:(AB FPT 0 10)"0    NB. sa série de Fourier (ordre 4)
 fe=: (X;Y) FESC"0         NB. Fonction en escalier
    ab=. (X;Y) XYSFESC (0 10;4)       NB. et
 feSF=:(ab FPT 0 10) "0    NB. sa série de Fourier (ordre 4)
 titre=.'Séries de Fourier issues de points '
 titre=.titre,'isolés <br/> via des fonctions'
 titre=.titre,' polynômiale et en escalier'
 titre   (fp`fpSF`fe`feSF)   AFFXY  (X;Y)   0 10
```



VI) SERIES DE FOURIER : script

NB. **SERIESDEFOURIER.ijs**

```
require 'plot'
require '~user/BOITAOUTILS.ijs'
require '~user/BERNEULER.ijs'
```

NB. ***Coefficients de la série de Fourier d'une fonction f sur un intervalle p,q***

NB. de période T=q-p, limitée à un polynome trigonométrique de degré N (entier >: 0)

NB. AB : coeff. (matrice de 2 lignes et N+1 colonnes)

NB. 1ere ligne : coefficients des cosinus

NB. 2eme ligne : coefficients des sinus

NB. Utilisation : *AB =. (f SF p,q) N*

```
    SF =: {{)c
wbxw=.1p1*nu2=.2*nu=.%T=.--/n [I=.1+i.N=.y
a=.nu*100 u. INTGLC n [b=.0
for_i. I do.
ftucos=.u.*((2&o.)@((i*wbxw)&*))
ftusin=.u.*((1&o.)@((i*wbxw)&*))
a=.a,nu2*100 ( ftucos INTGLC ) n
b=.b,nu2*100 ( ftusin INTGLC ) n
end.
1e_13 AR0 a,:b }}
```

NB. ***Coefficients de la série de FOURIER** **(approximation)***

NB. définie sur l'intervalle **[p q]** limitée à l'ordre **N**

NB. d'une fonction passant par les points **(X ; Y)**

NB. via une fonction polynômiale

NB. Utilisation : *AB=. (X;Y) XYSFPOL (p q;N)*

```
    XYSFPOL=:{{)d
'X Y'=.x [ 'pq N'=.y
C=.X POLXY Y
ff=.C&p.
(ff SF pq) N }}
```

NB. ***Coefficients de la série de FOURIER** **(approximation)***

NB. définie sur l'intervalle **[p q]** limitée à l'ordre **N**

NB. via une fonction en escalier

NB. d'une fonction passant par les points **(X ; Y)**

NB. Utilisation : *AB=. (X;Y) XYSFESC (p,q;N)*

```
    XYSFESC =:{{)d
'pq N'=.y
ff=. x FESC "0
(ff SF pq) N }}
```

NB. ***Ft polynôme trigo de degré N, de coefficients AB et période T=q-p***

NB. AB : matrice de 2 lignes (coef. de sin et cos) et N+1 colonnes

NB. Définition sur l'intervalle p,q

NB. Utilisation : *f =: (AB FPT p,q)"0*

```
    FPT =:{{)c
I=.i.{:$AB=.m [ w=.2p1%T=.-/|.n
+/+/AB*2 1 o./I*w*y }}
```

NB. ***Ft polynôme trigo de degré N,de type cosinus, de coef. Ro***,
NB. de période T=q-p, de déphasages FIC (Ro et FIC vect de N+1 composantes
NB. Définition sur l'intervalle p,q
NB. Utilisation : ***fptc =: ((Ro ,: FIC) FPTC p,q)"0***

```
    FPTC =:{{)c
Ro=.0{m [ FIC=.1{m [ w=.2p1%T=.-/|.n
+/Ro*2 o.FIC+(i.#Ro)*w*y }}
```

NB. ***Ft polynôme trigo de degré N,de type sinus, de coef. Ro***,
NB. de période T, de déphasages FIS (Ro et FIS vect de N composantes
NB. Utilisation : ***ftps =: ((Ro ,: FIS) FTPS T)"0***

```
    FTPS =:{{)c
Ro=.0{m [ FIS=.1{m [ w=.2p1%T=.-/|.n
+/Ro*1&o.FIS+(i.#Ro)*w*y }}
```

NB. ***Affichage pour t entre p et q de 2 (ou plusieurs) fonctions***
NB. x (facultatif) : chaîne de car avec options de plot
NB. Utilisation :
NB. ***(f ` g AFF) p,q*** ou ***x (f ` g AFF) p,q***
NB. ***(f0`f1`f2`f3`f4`f5 AFF) p,q*** ou ***x (f0`f1`f2`f3`f4`f5 AFF) p,q***

```
    AFF =:{{)a
z=. plot (];m`:0) 100 sint y
:
z=. x plot (];m`:0) 100 sint y }}
```

NB. ***Affichage pour t entre p et q de 1 à 4 fonctions***
NB. ***et de points isolés (X;Y)***
NB. Utilisation : ***(f0`f1`f2`f3) AFFXY (X;Y) (p,q)***
NB. ou ***'TITRE' (f0`f1`f2`f3) AFFXY (X;Y) (p,q)***

```
    AFFXY=:{{)c
'type line ; pensize 3' plot (];(m`:0)) 1000 sint y
pd 'type marker ; color black ; markersize 2'
pd n
pd 'show'
:
op1=.'type line;pensize 3;titlefont Arial 17 bold italic;title ',x
op2=.';color blue,red,green,purple;keypos lto;key ',(}.,',',.>m)
op3=.';keycolor blue,red,green,purple'
(op1,op2,op3) plot (];(m`:0)) 1000 sint y
pd 'type marker ; color black ;markersize 1'
pd n
pd 'show' }}
```

NB. ***Analyse de Fourier d'une fonction f limitée à l'ordre N***

NB. **[p,q]** : intervalle de définition ; période **T=q-p**

NB. Utilisation :   ***R =. ((<'f')   ANALYSEDEFOURIER   p,q) N***

```
      ANALYSEDEFOURIER =: {{)c
z=. P 3
z=. (((>m);((>m),'SF',(":y))) GRAPHIQUES n) ZZ=. (m ANAF n) y
'AB Ro FIC FIS Pf Pah Prh Pad Prd'=:ZZ
M=. AB,Ro,FIC,FIS,Pah,Prh,Pad,:Prd
M1=.(<' hd'),:<' a',' b',' Ro','FIC','FIS','Pah','Prh','Pad',:'Prd'
M2=. M1,.((1 1,8$0);(1)) MatBloc (i.y+1),5e_4 AR0 M
(Pf(m Titre n)y),(<M2),:Notice }}
```

NB. ***Pseudo-distance quadratique entre 2 fonctions f et g***

NB. Sur un intervalle fini [p,q]

NB. Utilisation :   ***R =. (f psdist2 g)   p,q***

```
      psdist2 =: {{ %:(-/|.y)%~100 (((*:@(u-v))"0) INTGLC) y}}
```

NB. ***Pseudo-distance en valeur absolue entre 2 fonctions f et g***

NB. Sur un intervalle fini [p,q]

NB. Utilisation :   ***R =. (f psdist1 g) p,q***

```
      psdist1 =: {{(-/|.y)%~100 (((|@(u-v))"0) INTGLC) y}}
```

NB. ***Pseudo-distance en valeur maxi entre 2 fonctions f et g***

NB. Sur un intervalle fini [p,q]

NB. Utilisation :   ***R =. (f psdist0 g) p,q***

```
      psdist0 =: {{>./((|@(u-v))"0)(1000&sint) y}}
```

NB. ***Comparaison de 2 fonctions f1 et f2 sur un intervalle [p,q]***

NB. avec affichage et des courbes et pseudo-distances: R = Dist0, Dist1, Dist2

NB. Dist0 : distance de la convergence uniforme

NB. Dist1 : moyenne de |f1-f2| sur [p,q]

NB. Dist2 : racine carrée de la moyenne du carré de (f1-f2) sur [p,q]

NB. Utilisation :   ***R =. (<'f1') COMPARAISON (<'f2') p,q***

```
      COMPARAISON =: {{)c
'D0 D1 D2'=.((u1 psdist0 v1),(u1 psdist1 v1),((u1=.m`:6) psdist2 (v1=.n`:6)))y
d0=.0j3 ": D0 [ d1=.0j3 ": D1 [ d2=.0j3 ": D2
CAP=.';xcaption Dist0=',d0,' Dist1=',d1,' Dist2=',d2
op=.options,(>m),' ',(>n),,CAP
op plot (];u1,:v1) 100 sint y
D0,D1,D2 }}
```

NB. ***Fonctions série de Fourier d'une fonction f pour t compris entre p et q***

NB. correspondant aux multiples degrés **d0 d1 d2...dk**

NB. création des fonctions **fSFd0, fSFd1,...fSFdk**

NB. dont la liste emboîtée est dans **R**

NB. Utilisation :   ***R =. ((<'f')   SFM   p,q)   d0 d1 d2...dk***

```
      SFM=:{{)c
N=.>./y [T=.-/|.n [R=.m
CC =. ( (m`:6) SF n ) N
for_i. y do. ii=._2{.'0',":i
dd=.((i+1)&{.)&.|:CC
```

```
R=.R,<X=.'SF',ii,(>m)
". X,'=:(dd FPT n)"0'
end.
R }}
```

NB. ***Puissance d’une fonction f sur un intervalle [p,q]***

NB. Utilisation : ***R =. (f PUISSANCE) p,q***

```
PUISSANCE =: {{)a
UUU=:(*:@u)"0
R=.(1000(UUU INTGLC) y)%-/|.y
poub=.EFFACE <'UUU'
R }}
```

NB. ***Produit de convolution de 2 fonctions (conjonction)***

NB. f et g sur un intervalle [p,q] h=f°g

NB. Utilisation : ***h =: ((f `g) CONVOLUTION p,q)"0***

```
CONVOLUTION =: {{100 ((({.m)`:6)*(((({:m)`:6)NMY y)"0))INTGLC n}}
```

NB. ***Méthode des noyaux***

NB. ***Noyaux de Dirichlet NDIR***

NB. T : période N : degré

NB. (NDIR 0)=(1+2N)/T

NB. Intégrale de NDIR dans [-T/2,T/2] = 1

NB. Développement en série de Fourier

NB. à l'ordre N de f(t) de période T est

NB. SFf(t) =: intégrale de _T/2 à T/2 de

NB. f(x).NDIR(t-x)*dx

NB. Utilisation : ***NDIR =: (N DIR T)"0***

```
DIR =: {{)c
N=.m [ T=.n
if. ( 1e_13 >|y) do. R=.(1+2*N)%T
else. R=. (1&o.(1+2*N)*1p1*y%T)%T*1&o.1p1*y%T end.
R }}
```

NB. ***Noyaux de Fejér NFEJ***

NB. (sommes de Césaro des noyaux de Dirichlet))

NB. T : période N : degré

NB. (NFEJ 0)=(1+N)/T

NB. Intégrale de NFEJ dans [-T/2,T/2] = 1

NB. Développement en série de Césaro-Fourier

NB. à l'ordre N de f(t) de période T est

NB. SCFf(t) =: intégrale de _T/2 à T/2 de

NB. f(x).NFEJ(t-x)*dx

NB. Utilisation : ***NFEJ =: (N FEJ T)"0***

```
FEJ =: {{)c
N=.m [T=.n
if. ( 1e_13 >|y) do. R=.(1+N)%T
else. R=.(*:(1&o.(1+N)*z)%1&o.z=.y*1p1%T)%T*1+N end.
R }}
```

NB. ***********************************

NB. ***FILTRES***

NB. ***Modifient la matrice des coefficients***

NB. sans changer la période ni l'intervalle de définition

NB. ***ABe*** : entrée ; ***ABs*** : sortie

NB. Utilisation : ***ABs =. x F…. ABe***

NB. ***********************************

NB. ***FILTRES agissant sur les amplitudes***

NB. ***Passe-bas***

NB. Utilisation : ***ABs =. k0 FPB ABe***

```
FPB =: {{|:(>:x){.|:y}}
```

NB. ***Passe-haut***

NB. Utilisation : ***ABs=. k0 FPH ABe***

```
FPH =: {{((2,x)$0),.|:x}.|:y}}
```

NB. ***Passe-bande***

NB. Utilisation : ***ABs=. (k0,k1) FPBD ABe***

```
FPBD=:{{0(<0 1;(i.0{x),(>:1{x)+i.(<:1{$y)-1{x)}y}}
```

NB. ***Filtre écrèteur***

NB. Utilisation : ***ABs=. max FECR ABe***

```
FECR =: {{y*"1 r%~x<.r=.%:+/*:y}}
```

NB. ***Filtre plancher***

NB. Utilisation : ***ABs=. min FPL ABe***

```
FPL =: {{y*"1 r%~x>.r=.%:+/*:y}}
```

NB. ***Filtre général sur les amplitudes***

NB. Utilisation : ***ABs=. x FG ABe***

NB. ***ABs=. (((#|:ABe)$0 1) FG ABe*** NB. Sélection des harmoniques impaires

NB. ***ABs=. (((#|:ABe)$1 0) FG ABe*** NB. Sélection des harmoniques paires

NB. ***ABs=. k FG ABe*** NB. k réel >0 ; amplification ou atténuation

NB. ***ABs=. k FG ABe*** NB. k réel <0 ; idem en opposition

NB. ***ABs=. V FG ABe*** NB. (#V)=(#|:ABe) ; idem sélectivement

```
FG =: {{x*"1 y}}
```

NB. ***Filtre dérivateur***

NB. Utilisation : ***ABs =. T FDER ABe***

```
FDER=: {{(2p1%m)*|. _1 1* (i.1{$y)*"1 y}}"0 _
```

NB. ***Filtre intégrateur*** (avec sortie nulle pour t=0)

NB. Utilisation : ***ABs =. T FINT ABe***

```
FINT =: {{)d
N=.<:1{$y [ a0=.0{0{y [ w=.2p1%x
R=. (y*(0,N$1),:(0,N$_1))
R=.R+(0,2*a0*N$1 _1),:0
R=.|.R(%"1)1,w*1+i.N
(-+/0{R)(<0;0)}R }}
```

NB. ***Filtre agissant sur les fréquences***

NB. avec annulation de la composante constante a_0

NB. x : entier ; ABe : matrice d’entrée ; ABs : matrice de sortie

NB. x=0 annule a_0 ; x>0 décalage vers les hautes fréquences

NB. x<0 décalage vers les basses fréquences avec perte de coefficients

NB. Utilisation : ***ABs =. x FFREQ ABe***

```
        FFREQ =: {{)d
select. *x
case. 0 do. R=.0(<0 1;0)}y
case. _1 do. R=.0(<0 1;0)}|:(|x)}.|:y
case. 1 do. R=.((2,x)$0),.0(<0 1;0)}y end.
R }}
```

NB. ***Fonction fs obtenue par application d’un filtre x&F…. sur une fonction fe***

NB. Pour **fe** : ordre maxi **N ;** intervalle de définition **[p q]**

NB. Utilisation : ***fs =: (p q;N) & ((x&F….) FILTRE fe)"0***

```
        FILTRE =:{{)c
'pq N'=.x
ABe=.(v SF pq) N
ABs=.u ABe
(ABs FPT pq) y }}
```

NB. ************************************

NB. ***Outils divers***

NB. ************************************

```
E =: 1!:2&2                                NB. Affiche et transmet son argument de droite (monadique)
P =: 9!:11                                 NB. Fixe le nombre de chiffres affichés (monadique)
```

NB. ***Efface des objets***

NB. Utilisation : ***EFFACE <'obj1'*** ou ***EFFACE 'obj1';'obj2';'obj3';...***

```
    EFFACE =: 4!:55
```

NB. ***Découpage de l’intervalle p,q en N sous-intervalles d'égales longueurs***

NB. Utilisation : ***R =. N sint p,q***

```
    sint =: {.@]+-/@|.@]*i.@>:@[%[
```

NB. ***Arrondi à 0 les éléments de y de valeur absolue < x (x>0)***

NB. Utilisation : ***R =. x AR0 y***

```
    AR0 =: (([<|@])*])"0 0
```

NB. ***Intégration numérique méthode de Gauss-Legendre composite***

NB. utilisant le polynôme de LEGENDRE de degré 7

NB. f (fonction à intégrer); p,q (intervalle d'intégration) divisé en n sous-intervalles de même longueur

NB. Utilisation : ***R =. n f INTGLC p,q***

```
    INTGLC =: {{)a
msi=.(>@(2&(<\))) x ({.@]+i.@>:@[*({:-{.)@]%[) y
LEGr7=._0.949107912342759 _0.741531185599395 _0.405845151377397
LEGr7=.LEGr7, 0,-|.LEGr7
LEGp7=.0.0647424830844263 0.139852695744671 0.190915025252494
LEGp7=.LEGp7, 0.208979591836819, |.LEGp7
VR=.i.0 [ I=.i.x
for_i. I do. VR=.VR,+/LEGp7*u. LEGr7 {{0.5*(+/y)-x*(-/y)}}"0 _ i{msi end.
(+/VR)*(--/y)%x }}
```

NB. ***Intégration numérique méthode de Romberg améliorant la méthode des trapèzes***

NB. **f** (fonction à intégrer); **p,q** (intervalle d'intégration)

NB. divisé en **n** sous-intervalles de même longueur (**n : multiple de 8**)

NB. Utilisation : ***R =. n f INTROMB p,q***

```
    INTROMB =:{{)a
h=.8*(b-a)%x [ 'a b'=.y [N=.x+1
X=.--:({.+{:)Y=.u."0 x sint y
Z=.(h*X++/(N$1,7$0)#Y),(-:h*X++/(N$1,3$0)#Y)
Z=.Z,((h%4)*X++/(N$1 0)#Y),((h%8)*X++/Y)
Z+/ .*_1r2835 4r135 _64r135 4096r2835 }}
```

NB. **Série de Fourier d'ordre N d'une fonction f**

NB. sur un intervalle **p,q** , de période **T=q-p**

NB. retourne une matrice R de 7 lignes et N+1 colonnes

NB. ligne 0 (a) ; ligne 1 (b) ; ligne 2 (ro)

NB. ligne 3 (déphasage retard pour cos) ; ligne 4 (temps retard pour cos)

NB. ligne 5 (déphasage retard pour sin) ; ligne 6 (temps retard pour sin)

NB. Utilisation : ***R =. (f SFRD p,q) N***

```
    SFRD =: {{)c
X=.(u SF n )y [T=.-/|.n          NB. coeff. série de Fourier en cos et sin
Y=.|:*.j./X                      NB. modules avec déphasage en cos dans ]_1p1 , 1p1]
dc=. _2p1|1{Y                    NB. déphasage pour cos dans ]_2p1,0]
ds=. _2p1|1r2p1+1{Y              NB. idem pour sin
tc=.0,(}.dc)%(1+i.y)*(2p1)%T     NB. temps retard pour cos
ts=.0,(}.ds)%(1+i.y)*(2p1)%T     NB. idem pour sin
X,({.Y),dc,tc,ds,:ts }}
```

NB. ***Série de Fourier limitée de multiples degrés d0 d1 d2 ...dk***
NB. d'une fonction f sur un intervalle p,q de période T=q-p avec plot
NB. retourne la liste des fts créées et affichées
NB. x (facultatif) : chaîne contenant des options de plot
NB. Utilisation : ***R =. [x] ((<'f') SFMAFF p,q) d0 d1 ...dk***

```
    SFMAFF =:{{R [ ((R=.(m SFM n)y) AFF) n}} : {{R [ x ((R=.(m SFM n)y) AFF) n}}
```

NB. ************************************
NB. ***Outils pour ANALYSEDEFOURIER***

NB. ***Options pour plot*** (nom)

```
options=.'titlefont arial 20 bold;title Comparaison de 2 fonctions'
options=.options,';captionfont arial 14 italic bold;pensize 4'
options=.options,';keyfont arial 14 bold;keypos cto;keystyle lbh;key '
```

NB. ***Analyse de Fourier limitée au degré N d'une fonction f de période T=q-p***
NB. **[p,q]** : intervalle de définition
NB. Utilisation : ***R =. ((<'f') ANAF p,q) N***

```
    ANAF =: {{)c
z=.*:(<0;0){AB=.((m`:6) SF n)y   NB. AB : série de fourier et z : carré de a0
'Ro FIC'=.|:*.j./AB [ T=.-/|.n   NB. Ro : Amplitudes des harmoniques
FIC=.0,}._2p1|-FIC               NB. FIC : déphasage retard pour série cos dans ]_2p1 , 0]
FIS=.0,}._2p1|FIC+1r2p1          NB. FIS : déphasage retard pour série sin dans ]_2p1 , 0]
UUU=:(*:@(m`:6))"0
Pf =.(100 (UUU INTGLC) n)%T      NB. Pf : puissance de f
Pah=. z,}.-:+/*:AB               NB. Pah : puissance absolue de chaque harmonique
Prh=. Pah%Pf                     NB. Prh : idem en pourcentage de puissance de f
Pad=. +/\Pah                     NB. Pad : puissance absolue expliquée pour chaque degré
Prd=. +/\Prh                     NB. Prd : idem en pourcentage de puissance de f
((>m),'SF',(":y))=:(AB FPT n)"0  NB. fonction crée : fSFN
poub=.EFFACE <'UUU'
AB;Ro;FIC;FIS;Pf;Pah;Prh;Pad;Prd }}
```

NB. Utilisation : ***(('f';'fSFN') GRAPHIQUES p,q) ZZ*** où ***ZZ =. ((<'f') ANAF p,q) N***

```
    GRAPHIQUES =:{{)c
'AB Ro FIC FIS Pf Pah Prh Pad Prd'=:y
T=.-/|.n [ N=._1+N1=.#Ro
X=.1000 sint n
pd 'reset'
pd 'textfont arial 18 bold italic;textcolor BLACK'
pd 'textc 500 _8x ANALYSE DE FOURIER'
pd 'sub 0 0 1000 _40x;sub 3 1'
pd 'new'
```

```
pd 'type line;color blue,red;pensize 3'
pd 'keypos lto;keystyle loh;keyfont arial 13 bold'
pd 'key ',(>0{m),', ',(>1{m)
pd (];((0{m)`:6),:((1{m)`:6)) X
pd 'new'
pd 'title Spectre version cosinus'
pd 'keypos rti;keystyle loh;keyfont arial 13 bold'
pd 'keycolor black,red'
pd 'key Amplitudes, "Déphasages retard"'
pd 'type stick;color black;pensize 4'
pd (i.N1);Ro
pd 'type stick;color red;pensize 4'
pd (i.N1);FIC
pd 'new'
pd 'title Pourcentage de puissance expliquée'
pd 'type line, marker;color black,red;pensize 3'
pd 'keystyle marker;keymarkers diamond, plus;keypos rmi'
pd 'key "Par degré","Par harmonique"'
pd ((i.N1);(100*Prd))
pd ((i.N1);(100*Prh))
pd 'show'
'' }}
```

NB. Utilisation : *PF ((<'f') Titre p,q) N*

```
Titre=: {{)c
L=.#V=.'Fonction: ',(>m),' Puissance: ',(":x),' Fonction crée: ',(>m),'SF',(":y)
<('Série de Fourier ordre: ',(":y),' Intervalle: ',(":n),' Période: ',(":-/|.n)),:V }}
```

NB. *Notice* (nom)

```
Notice=: 67{.' VARIABLES CREES :'
Notice=:Notice,:67{.' hd : numéro d''harmonique ou de degré de polynôme trigo '
Notice=:Notice, 67{.' a : coefficient de cosinus par harmonique (a=.0{AB)'
Notice=:Notice, 67{.' b : coefficient de sinus par harmonique (b=.1{AB)'
Notice=:Notice, 67{.' Ro : amplitude par harmonique'
Notice=:Notice, 67{.'FIC : déphasage retard pour la version cosinus'
Notice=:Notice, 67{.'FIS : déphasage retard pour la version sinus'
Notice=:Notice, 67{.'Pah : puissance absolue expliquée par harmonique'
Notice=:Notice, 67{.'Prh : puissance relative expliquée par harmonique'
Notice=:Notice, 67{.'Pad : puissance absolue expliquée par degré'
Notice=:Notice, 67{.'Prd : puissance relative expliquée par degré'
Notice=:Notice, 67{.' Pf : puissance de la fonction'
Notice=:Notice, 67{.' Pour obtenir a et b écrire : a=.0{AB et b=.1{AB'
Notice=:<Notice
```

NB. ***********************************

NB. ***Outil pour* CONVOLUTION**

NB. NMY (conjonction)

NB. on a g(y) = f(t-y)

NB. Utilisation : *g =: (f NMY t)"0*

```
NMY=:{{u n-y}}
```

NB. ***********************************

NB. ***Coefficients du polynôme de degré n***
NB. ***passant par les points (xi ; yi) où i=0 1 2 … n***
NB. Utilisation : ***C=. x0 x1...xn POLXY y0 y1 ... yn***

```
      POLXY =: {{y%.x^/i.#x}}"_ _
```

NB. ***Fonction en escalier passant par des points (X;Y)***
NB. **Utilisation :** ***f =: (X;Y) FESC "0***

```
      FESC=:{{)a
pq=.({.,{:)X [ 'X Y'=.m
K=.i.#M=.Y,.~(}:@(],.1&|.))/:~pq,-:@(2&(+/\))X
for_k. K do. 'z0 z1 z2'=.k{M
if. (y>:z0)*.(y<:z1) do. R=.z2 end. end.
R }}
```

NB. ***y est-il inclus dans l'intervalle p,q ? R=.0 ou 1***
NB. n=0 (]p,q[); n=1 ([p,q]); n=2 ([p,q[); n=3 (]p,q])
NB. Utilisation : ***R=. ((p,q) IINT n)"0 y***

```
      IINT=:{{)c
'p q'=.m
select. n
case. 0 do. R=.(y> p)*.(y< q)
case. 1 do. R=.(y>:p)*.(y<:q)
case. 2 do. R=.(y>:p)*.(y< q)
case. 3 do. R=.(y> p)*.(y<:q)
end.
R }}
```