DEVELOPPEMENTS EN SERIES

R.Coquidé 19/01/19

Une fonction définie, continue et indéfiniment dérivable dans un voisinage de t=0 du plan complexe est associée à un développement en série de Mac-Laurin :

$$f(t)=f(0)+f'(0)\frac{t}{1!}+f''(0)\frac{t^2}{2!}+f^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!}+...+f^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$$

Cela, c'est la théorie. En pratique :

1) Une telle série ne converge pas forcément vers la valeur de f(t). On démontre que cette convergence est effective à l'intérieur d'un **cercle de convergence** centré en 0 dont le rayon **R** nommé **rayon de convergence** est :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot f^{(n-1)}(0)}{f^{(n)}(0)}\right| \quad \text{(si cette limite existe!)}$$

L'idéal c'est **R=∞** : la série converge alors vers f(t) dans tout le plan complexe (c'est le cas des développements en série de **exp(t), sin(t), cos(t), sh(t), ch(t)** et quelques autres).
D'autres ont un rayon de convergence **R=1 : c**'est le cas des développements en séries de **Arctg(t), Arcsin(t), Argth(t), Argsh(t), 1/(1+t), Log(1+t), 1/(1-t), Log(1-t).**
Les développements en séries de **tg(t), th(t), 1/cos(t), t/sin(t), 1/ch(t), t/sh(t)** ont un rayon de convergence **R=π/2.**

2) En informatique, il est hors de question de calculer une infinité de termes. On utilisera un développement limité à un degré d fini (c'est un polynôme de degré d). On fera alors une erreur systématique donnée par :

$$f(t)=\sum_{n=0}^{d} f^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}+f^{(d+1)}(\theta t)\frac{t^{d+1}}{(d+1)!} \quad \text{où } 0<\theta<1 \text{ (mais } \theta \text{ est inconnu!)}$$

3) Si t est «très proche du cercle de convergence, il faudra calculer beaucoup de termes pour avoir une précision suffisante (convergence très lente). C'est peu pratique pour les calculs numériques.

4) Si **R=0** on ne peut utiliser le développement en série pour des calculs numériques de la fonction car on ne peut donner à t que la valeur 0. Ces développements ne peuvent être intéressants que si on ne prend en considération que les coefficients de ces développements (la variable t est purement formelle, sans valeur particulière) ce sont les **séries formelles.**

Dans cet article, on n'étudie pas ces séries formelles : ce sera l'objet d'un futur article.

Tous les coefficients des séries sont calculés « exactement » et exprimés au moyen des **entiers étendus** et des **nombres fractionnaires**. Aussi, si on donne à la variable t une valeur entière ou fractionnaire (de module inférieur au rayon de convergence R de la série), nous obtenons une valeur « exacte » … pour l'approximation polynomiale correspondant au degré de la limitation de la série. Plus précisément, la seule erreur faite sur l'évaluation de la fonction est alors l'erreur systématique due à l'approximation polynomiale de la fonction sans aucune erreur d'arrondi (ou troncature des chiffres). Cette erreur systématique est une fonction décroissante du degré du polynôme et elle tend vers 0 quand ce degré tend vers l'infini.

Si t prend une valeur décimale non fractionnaire, on obtient la précision du flottant c'est-à-dire au plus 18 chiffres exacts … dans le meilleur des cas car, alors, à l'erreur systématique précédente s'ajoute une erreur d'arrondis provenant de l'erreur sur chaque terme calculé. Cette erreur d'arrondi est une fonction croissante du nombre de termes calculés c'est-à-dire fonction croissante du degré du polynôme. Cette erreur d'arrondi tend vers l'infini avec le degré du polynôme. Si t prend une valeur complexe compatible avec le rayon de convergence, on obtient à nouveau la précision du flottant.

Dans le cas de la précision du flottant, l'***erreur résultante*** somme de l'***erreur systématique*** (qui dépend de l'algorithme utilisé) et de l'***erreur d'arrondi*** (qui dépend de l'outil de calcul) commence par décroître, passe par un minimum, puis croît en tendant vers l'infini lentement … mais sûrement ! Il existe donc un ***degré d_{op} optimal*** (généralement inconnu avec précision) où l'erreur résultante sera minimale. En flottant, il est donc illusoire d'espérer obtenir un résultat exact en augmentant le degré du polynôme approximant une fonction. Une bonne approximation du $\boldsymbol{d_{op}}$ est l'abscisse de l'intersection des courbes représentant l'erreur systématique et l'erreur d'arrondi.

Un polynôme est une série dont les coefficients sont « nuls presque partout ».

Espace de travail :

DEVSERIES.ijs

(développements en séries de Mac-Laurin, suites de nombres, séries numériques)

```
require   '.../boitaoutils.ijs'
La variable (ou indéterminée) est notée t.
Seuls les coefficients des séries sont affichés.
Dans ce qui suit «intgr» signifie «intégrale entre 0 et t de»
```

I - Utilisation

A) Développements en séries de fonctions « usuelles »

Séries des fonctions hypergéométriques généralisées

```
limitées au degré d (entier positif);
a,b : vecteurs réels ou complexes (éventuellement vides):
```

S =. (a;b) sfhg d

Fonction	a	b	var	Ray. Conv. remarque
exp(t)	''	''	t	∞
exp(-t)	''	''	-t	∞
sin(t)/t	''	3r2	$-t^2/4$	∞
sh(t)/t	''	3r2	$t^2/4$	∞
cos(t)	''	1r2	$-t^2/4$	∞
ch(t)	''	1r2	$t^2/4$	∞
Arcsin(t)/t	1r2 1r2	3r2	t^2	1
Argsh(t)/t	1r2 1r2	3r2	$-t^2$	1
Arctg(t)/t	1r2 1	3r2	$-t^2$	1
Argth(t)/t	1r2 1	3r2	t^2	1
1/(1+t)	1	''	-t	1
1/(1-t)	1	''	t	1
t^m $m\in\mathbb{N}$	-m	''	1-t	1
$(1+t)^m$ $m\in\mathbb{R}$	-m	''	-t	1 polyn deg m si $m\in\mathbb{N}$
$(1-t)^m$ $m\in\mathbb{R}$	-m	''	t	1 polyn deg m si $m\in\mathbb{N}$
$\left(\sqrt{\pi}/2t\right)erf(t)$	1r2	3r2	$-t^2$	∞ ft erreur
$\gamma(p,t).p/t^p$	p	p+1	-t	∞ ft gamma incomplète
$\beta(p,q,t).p/t^p$	P,1-q	p+1	t	∞ ft beta incomplète
(2/π).ELK(t)	1r2 1r2	1	t^2	1 intgr elliptique 1^e esp
(2/π).ELE(t)	1r2 _1r2	1	t^2	1 intgr elliptique 2^e esp
$(\nu!)((2/t)^\nu)J_\nu(t)$	''	ν+1	$-t^2/4$	∞ ft Bessel 1^e espèce
$(\nu!)((2/t)^\nu)I_\nu(t)$	''	ν+1	$t^2/4$	∞ ft Bessel 2^e espèce
$L_n(t)$	-n	1	t	Pol Laguerre
$L^\alpha_n(t)$	-n	α+1	t	Pol Laguerre généralisé
$P_n(t)$	-n , n+1	1	(1-t)/2	Pol Legendre
$T_n(t)$	-n , n	1/2	(1-t)/2	Pol Tchebychev 1^e espèce
$U_n(t)$	-n , n+2	3/2	(1-t)/2	Pol Tchebychev 2^e espèce
$((-1)^n n!/(2n)!)H_{2n}(t)$	-n	1/2	t^2	Pol Hermite degré pair
$((-1)^n n!/(2n+1)!(2t))H_{2n+1}(t)$	-n	3/2	t^2	Pol Hermite degré impair
$E_{2n}(t)$	-n,(1/2)-n	1/2	$-t^2/4n^2$	Pol d'Euler
$(n!/(1+\alpha)_n)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$	-n,1+n+α+β	1+α	(1-t)/2	Pol de Jacobi
$(n!/(2\nu)_n)C_n^{(\nu)}(t)$	-n,n+2ν	ν+1/2	(1-t)/2	Pol de Gegenbauer

Série limitée au degré d de la fonction sélectionnée par I :

```
    S =. I ser d
```

```
I                     I             Rayon de convergence
0  Zéro                                   R=infini
1  exp(t)            _1  exp(-t)          R=infini
2  Ln(1+t)           _2  Ln(1-t)          R=1
3  sin(t)            _3  sh(t)            R=infini
4  cos(t)            _4  ch(t)            R=infini
5  tan(t)            _5  th(t)            R=pi/2
6  Arcsin(t)         _6  Argsh(t)         R=1
7  Atan(t)           _7  Argth(t)         R=1
8  t/(exp(t)-1)      _8  t/(1-exp(-t))    R=infini
9  t%sin(t)          _9  t%sh(t)          R=pi/2
10 1%cos(t)          _10 1%ch(t)          R=pi/2
11 t%tan(t)          _11 t%th(t)          R=pi/2
12 Airy0(t)          _12 Airy1(t)         R=infini
        (fts d'Airy solutions de y"-ty=0)
13 Lamb0(t)          _13 Lamb1(t)         R=infini
  (fts de Lambert réciproques de t*exp(t) et t*exp(-t))
14 intgr(1-cos(z))/z _13 intgr(ch(z)-1)/x R=infini
15 intgr sin(x)/x    _13 intgr sh(x)/x    R=infini
16 intgr tg(x)/x     _13 intgr th(x)/x    R=pi/2
17 intgr exp(x²)     _17 intgr exp(-x²)   R=infini
18 intgr sin(x²)     _18 intgr sh(x²)     R=infini
19 intgr cos(x²)     _19 intgr ch(x²)     R=infini
20 intgr tg(x²)      _20 intgr th(x²)     R=pi/2
21 intgr x/sin(x)    _21 intgr x/sh(x)    R=pi/2
22 Gud0(t)           _13 Gud1(t)          R=1r2p1
    fts de Gudermann: intgr 1/Cos(x) et 1/Ch(x)
23 intgr x/tg(x)     _23 intgr x/th(x)    R=pi/2
24 1/(1+t)           _24 1/(1-t)          R=1
25 t                 _25 -t               R=infini
26 1                 _26 -1               R=infini
27 ELK(t)/(pi/2)     _27 ELE(t)/(pi/2)    R=1
  (intégrales elliptiques complètes de 1e et 2e espèces)
28 Log(sin(t)/t)     _28 Log(sh(t)/t)     R=1
29 Log(cos(t))       _29 Log(ch(t))       R=1
30 Log(tg(t)/t)      _30 Log(th(t)/t)     R=1
31 exp(exp(t)-1)     _31 exp(1-exp(-t))   R=infini
32 exp(sin(t))       _32 exp(sh(t))       R=infini
33 exp(1-cos(t))     _33 exp(ch(t)-1)     R=infini
34 exp(tg(t))        _34 exp(th(t))       R=infini
```

```
S =. i sbin j
```
Séries du binôme de NEWTON

```
(1 + t) puissance i si j>0
(1 - t) puissance i si j<0
limitées au degré d=|j| (j entier i réel ou complexe)
```

```
S =. n sbase d
```
Série de base (t^n) `limitée au degré d`

```
Tous les coefficients sont nuls, sauf le n ième qui est égal
à 1
```

```
S =. r sbess1 d
```
Série de la Fonction de Bessel de 1[e] espèce modifiée,

de paramètre x=r, limitée au degré d : $Fj_r(t)=(r\,!)\left(\frac{2}{t}\right)^r J_r(t)$

```
S =. r sbess2 d
```
Série de la Fonction de Bessel de 2[e] espèce modifiée,

de paramètre x=r, limitée au degré d : $Fi_r(t)=(r\,!)\left(\frac{2}{t}\right)^r I_r(t)$

```
Mafonc =:  S & FS
Mafonc t0  t1  t2 ... tn-1  tn
```
Création d'une fonction à partir d'une série S et utilisation

B) Quelques suites numériques et polynômes classiques

```
S =. Nber N
```
Suite des Nombres de Bernoulli (limitée à l'ordre N)

```
S =. p Pberg N
```
Suite des nombres de Bernoulli généralisés (de paramètre p, limitée à l'ordre N)

```
S =. Pber N
```
Polynôme de Bernoulli (degré N)

```
S =. Neul N
```
Suite des Nombres d'Euler (limitée à l'ordre N)

```
S =. Peul N
```
Polynôme d'Euler (degré N)

```
S =. Nbell N
```
Suite des Nombres de Bell (limitée à l'ordre N)

```
S =. Nmers N
```
Suite des Nombres de Mersenne (limitée à l'ordre N)

```
S =. Nferm N
```
Suite des Nombres de Fermat (limitée à l'ordre N)

```
S =. Nfib N
```
Suite des Nombres de Fibonacci (limitée à l'ordre N)

```
S =. Ntang N
```
Suite des Nombres tangents (limitée à l'ordre N)

```
S =. Ncat N
```
Suite des Nombres de Catalan (limitée à l'ordre N)

```
S =. Ngen N
```
Suite des Nombres de Genocchi (limitée à l'ordre N)

```
S =. Nmotz  N
```
Suite des Nombres de Motzkin (limitée à l'ordre N)

```
S =. p Nberns N
```
Polynômes de Bernstein (degré N ; paramètre p inclus dans 0 ,1 ,2 ,…, N)

```
S =. Ppoc N
```
Polynôme de Pochhammer de 1e espèce (degré N)

```
S =. PPOC N
```
Polynôme de Pochhammer de 2e espèce (degré N)

```
S =. Phil1 N
```
Polynôme de Hilbert de 1e espèce (degré N)

```
S =. Phil2 N
```
Polynôme de Hilbert de 2e espèce (degré N)

```
S =. Pboub N
```
Polynôme de Boubaker (degré N)

```
S =. Pleg N
```
Polynôme de Legendre (degré N)

```
S =. (N;p) Flega d
```
Fonction de Legendre associée (degré y) (N : degré du pol de Legendre associé; p: paramètre inclus dans 0 1 2 ...N)

```
S =. Plag N      ou      S =. p Plag N
```
Polynôme de Laguerre (degré N) ou de ***Laguerre généralisé*** (degré N et paramètre p)

```
S =. Pherm N
```
Polynôme de Hermite (degré N)

C) Manipulations de séries (et polynômes)

Addition des 2 séries S1 et S2

```
    S =. S1 sadd S2
```

Soustraction de 2 séries

```
    S =. S1 ssou S2
```

Produit de 2 séries

```
    S =. S1 spro S2
```

Produit de Hadamart de 2 séries (produit terme à terme des coefficients)

```
    S =. S1 sprh S2
```

Quotient de 2 séries (réponse _ si impossible)

```
    S =. S1 squo S2
```

Idem si S2(0) non nulle (division toujours possible)

```
    S =. S1 sq S2
```

Dérivée d'une série

```
    S =. sder S1
```

Primitive d'une série

```
    S =. a0 spri S1
```

Série S1(at)

```
    S =. a smul S1
```

Série S1(-t)

```
    S =. ssig S1
```

Série S1(t/a)

```
    S =. a sdiv S1
```

Série $S1(t).t^i$ (i entier ≥0)

```
    S =. i smxn S1
```

Série $S1(t^i)$ (i entier > 0)

```
    S =. i svar S1
```

Série S1 avec degré d (entier>0) par troncature ou ajout de 0

```
S =. d sdeg S1
```

Inverse d'une série (si S1(0) ≠ 0)

```
S =. sinv S1
```

Produit de composition S1(S2(t)) (si S2 polynôme ou S2(0) = 0)

```
S =. S1 scom S2
```

Série $S1(t)^j$ (j entier>0)

```
S =. S1 spui j
```

Série réciproque de s1(t) (s1(0)=0 et s1'(0) diff de 0)

```
S =. srec S1
```

Partie réelle de s1(it) avec i=(0j1)

```
S =. sree S1
```

Partie imaginaire de s1(it) avec i=(0j1)

```
S =. sima S1
```

Valeur de la série S(t0) il faut |t0|<R ou S polynôme

```
r =. t0 sval S
```

II - Détails de programmation

Séries des fonctions hypergéométriques généralisées :

```
sfhg =: 4 : '(*/|:(,A)(POC"_ 0)N)%(*/|:(,B)(POC"_ 0)N)*!N=.i.y+1x[''A B''=.x'
```

Moult séries "usuelles":

```
     ser =: 4 : 0"0 0
cx=.-sx=.*x [ s=.x<0
L0 =.'(y+1)$0x'                                   NB. ZERO
L1 =.'((1+y)$1x,sx)%!i. 1x+y'                     NB. exp(t) et exp(-t)
L2 =.'0x,sx*(y$1x,cx)%1x+i.y+0x'                  NB. Log(1+t) et Log (1-t)
L3 =.'((1+y)$(0x 1 0,cx))%!i.1x+y'                NB. sin(t) et sh(t)
L4 =.'((1+y)$(1x 0,cx,0x))%!i.1x+y'               NB. cos(t) et ch(t)
L5 =.'((3x*sx)ser y)sq(sx*4x)ser y'               NB. tg(t) et th(t)
L6 =.'(1+y){.0x spri 2x svar _1r2 sbin cx*>.2x+-:y'   NB. Arcsin(t) et Argsh(t)
L7 =.'(1+y){.0x spri 2x svar _1x sbin sx*>.2x+-:y'    NB. Arctg(t) et Argth(t)
L8 =.'sinv sx*}.sx ser y+1x'                      NB. t/(exp(t)-1) et t/(1-exp(-x))
L9 =.'sinv}.(sx*3x)ser y+1x'                      NB. t/sin(t) et t/sh(t)
L10=.'sinv (4x*sx)ser y+0x'                       NB. 1/cos(t) et 1/ch(t)
L11=.'sinv}.(sx*5x)ser y+1x'                      NB. t/tg(t) et t/th(t)
L12=.'(1+y){.(s#0),1x 0 0,,(((*/\_2x+s+k)%!(s=.x<0)+k=.3x*>:i.>:>.y%3),.0x),.0x'
                              NB. fts Airy0(t) et Airy1(t) solutions de y"-ty=0
L13=.'(y+1){.srec 0x,sx ser 1x+y'                 NB. lamb0(t) et Lamb1(t)
     NB. Dans ce qui suit, « intgr » signifie : « intégration entre 0 et t de »
L14=.'(y+1){.0x spri cx*}.(sx*4x)ser y'           NB. intgr(1-cos x)/x et (ch(x)-1)/x
L15=.'(y+1){.0x spri}.(sx*3x)ser y'               NB. intgr sin(x)/x et sh(x)/x
L16=.'(y+1){.0x spri}.(sx*5x)ser y'               NB. intgr tg(x)/x et th(x)/x
L17=.'(1+y){.0x spri 2x svar sx ser 1x+>.-:y'     NB. intgr exp(x^2) et exp(-x^2)
L18=.'(y+1){.0x spri 2x svar(sx*3x)ser 1x+>.-:y'  NB. intgr sin(x^2) et sh(x^2)
L19=.'(y+1){.0x spri 2x svar(sx*4x)ser 1x+>.-:y'  NB. intgr cos(x^2) et ch(x^2)
L20=.'(y+1){.0x spri 2x svar(sx*5x)ser 1x+>.-:y'  NB. intgr tg(x^2) et th(x^2)
L21=.'0x spri (sx*9x) ser <:y'                    NB. intgr x/sin(x) et x/sh(x)
L22=.'0x spri (sx*10x) ser <:y'       NB. Gud0(t)=intgr 1/cos(x) et Gud1(t)=intgr 1/ch(x)
L23=.'0x spri (sx*11x) ser <:y'                   NB. intgr x/tg(x) et x/th(x)
L24=.'(y+1)$1x,cx'                                NB. 1/(1+t) et 1/(1-t)
L25=.'(y+1){.0x,sx'                               NB. t et -t
L26=.'(y+1){.sx,0x'                               NB. 1 et _1
L27=.'1x,((-1x,}:V)^s)%~*:(y$0 1x)*%/\V=.1x+i.y'  NB. ELK(t)/(pi/2) et ELE(t)/(pi/2)
                              NB. Intégrales elliptiques complètes de 1e et 2e espèce
L28=.'(2x ser y)scom 2}.(sx*3x)ser 2x+y'          NB. Log(sin(t)/t) et Log(sh(t)/t)
L29=.'(2x ser y)scom}.(sx*4x)ser 1x+y'            NB. Log(cos(t)) et Log(ch(t))
L30=.'(2x ser y)scom 2}.(sx*5x)ser 2x+y'          NB. Log(tg(t)/t) et Log(th(t)/t)
L31=.'(1x ser y)scom 0x,}.sx*sx ser y'            NB. exp(exp(t)-1) et exp(1-exp(-t))
L32=.'(1x ser y)scom (sx*3x)ser y'                NB. exp(sin(t)) et exp(sh(t))
L33=.'(1x ser y)scom cx*0x,}.(sx*4x)ser y'        NB. exp(1-cos(t)) et exp(ch(t)-1)
L34=.'(1x ser y)scom (sx*5x)ser y'                NB. exp(tg(t)) et exp(th(t))
".".'L',":|x                  NB. Sélection et exécution
)
```

Fonction de Bessel de 1e espèce, de paramètre x=r, limitée au degré y multipliée par (!r)*(2/t)^r : $Fj_r(t)=(r!)(\frac{2}{t})^r J_r(t)$

```
    sbess1 =: 4 : '((''''';1x+x:x)sfhg N)scom _1r4*2x sbase
N=.x:y'
```

Fonction de Bessel de 2e espèce, de paramètre x=r, limitée au degré y multipliée par (!r)*(2/t)^r *:* $Fi_r(t)=(r!)(\frac{2}{t})^r I_r(t)$

```
    sbess2 =: 4 : '((''''';1x+x:x)sfhg N)scom 1r4*2x sbase
N=.x:y'
```

Manipulation de séries

Addition de 2 séries :

```
    sadd =: (#@[<.#@]){.+/@(>@;)
```

Soustraction de 2 séries :

```
    ssou =: [sadd-@]
```

Produit de 2 séries :

```
    spro =: <.&#{.+//.@(*/)
```

Produit de Hadamart de 2 séries :

```
    sprh =: [: Diag */
```

Inverse d'une série :

```
    sinv =: 3 : 0
r=.v1=.1x,(n1=.#s=.-(ib0=.%{.y)*}.y)$0x
while. n1>0 do. r=.r sadd v1=.0x,v1 spro s[n1=.<:n1 end.
ib0*r
)
```

Quotient de 2 séries si y(0) différent de 0 :

```
    sq   =: [spro sinv@]
```

Quotient de 2 séries :

```
    squo =: 4 : 0
k=. ((0=x)i.0x) <. ((0=y)i.0x)
if. (0~:{.y1=.k}.y) do. z =. (k}.x) sq y1
else. z=. _ end.
z
)
```

Dérivée d'une série :

```
    sder =: }.@(]*i.@#)
```

Primitive d'une série :

```
    spri =: [,]%>:@i.@#@]
```

Série y dont la variable est multipliée par x :

```
    smul =: ]*[^i.@#@]
```

Série y dont la variable est divisée par x :

```
    sdiv =: ]%[^i.@#@]
```

Produit d'une série par t^x :

```
     smxn =: ],~[$0:
```

Chgt de signe de la variable d'une série :

```
     ssig =: ]*$$1 _1"_
```

Série y(t^x) :

```
     svar =: ]#~#@]$1:j.<:@[
```

Série y avec degré x (troncature ou ajout de 0):

```
     sdeg =: ([:>:[){.]
```

Produit de composition de 2 séries :

```
     scom =: 4 : 0
v1=.1x, }. r=.({.x),(n1=. <: (#x) <. (#y))#i=.0x
while. i<n1 do. r=.r sadd((i=.>:i){x)*v1=.v1 spro y end.
r
)
```

Binôme de Newton :

```
     sbin =: 4 : '(x(^!._1)i.k)*(k$1x,*y)%!i.k=.1x+x:|y'
```

Série réciproque d'une série :

```
     srec =: 3 : 0
w=.0x,{.v1=. sinv sder y
while. ($v1)>:($w) do. w=. w,((<:$w){v1 scom w)%$w end.
w
)
```

Série x élevée à la puissance entière et positive y :

```
     spui =: 4 : 0
v1=. ((#x){. 1x)[ n1 =. y
while. n1>0 do. v1=. v1 spro x [ n1=. <: n1 end.
v1
)
```

Série de base (t ^ n) ; x=n ; y=degré max

```
     sbase =: 4 : '(y+1){.(x#0x),1x'
```

Partie réelle de y(it) où i=(0j1) :

```
     sree =: Re@(0j1"_ smul])
```

Partie imaginaire de y(it) avec i=(0j1)

```
     sima =: Im@(0j1"_ smul])
```

Valeur de la série y pour t = x :

```
     sval =: [#.|.@]
```

Suites de nombres et polynômes

Suite des Nombres de Bernoulli (limitée à l'ordre y) :

```
Nber =: 3 : '(8x ser N)*!i.1x+N=.0x+y'
```

Suite des nombres de Bernoulli généralisés (de paramètre x, limitée à l'ordre y)

```
Nberg =: 4 : '(!i.K)*sinv(x:x)spui~}.1x ser K=.1x+x:y'
```

Polynôme de Bernoulli (degré y) :

```
Pber =: 3 : '(N sbin N)*|.Nber N=.0x+y'
```

Suite des Nombres d'Euler (limitée à l'ordre y) :

```
Neul =: 3 : '(_10x ser N)*!i.1x+N=.y+0x'
```

Polynôme d'Euler (degré y) :

```
Peul =: 3 : '(!N)%~+/((N sbin N)*(Neul N)%2x^i.1x+N)
*((1x+N){._1r2 1x)spui"_ 0/N-i.1x+N=.0x+y'
```

Suite des Nombres de Bell (limitée à l'ordre y) :

```
Nbell =: 3 : '(31x ser N)*!i.1x+N=.0x+y'
```

Suite des Nombres de Mersenne (limitée à l'ordre y) :

```
Nmers =: 3 : '_1x+2x^i.1x+y'
```

Suite des Nombres de Fermat (limitée à l'ordre y) :

```
Nferm =: 3 : '1x+2x^2x^i.1x+y'
```

Suite des Nombres de Fibonacci (limitée à l'ordre y) :

```
Nfib =: 3 : '0x,(y~:0)#sinv (0x+y){.1x _1 _1'
```

Suite des Nombres tangents (limitée à l'ordre y) :

```
Ntang =: 3 : '(5x ser y+0x)*!i.1x+y'
```

Suite des Nombres de Catalan (limitée à l'ordre y) :

```
Ncat =: 3 : '(N!(N+N))%1x+N=.i.1x+y'
```

Suite des Nombres de Genocchi (limitée à l'ordre y) :

```
Ngen =: 3 : '2x*(1x-2x^i.1x+y)*Nber 0x+y'
```

Suite des Nombres de Motzkin (limitée à l'ordre y) :

```
Nmotz =: 3 : '(|:(2x*i.1x+K)!/i.1x+y)+/ .*Ncat
K=.0x+<.-:y'
```

Polynômes de Bernstein (degré y ; x = 0 1 2... y) :

```
Pberns =: 4 : '(I!N)*(I#0x),(N-I)sbin I-N=.0x+y[I=.0x+x'
```

Polynôme de Pochhammer de 1e espèce (degré y) :

```
Ppoc =: 3 : 'if. y=0 do. 1x else. spro/(1x,-i.N),.
(0x,N$1x),.((>:,<:)N=.x:y)$0x end.'
```

Polynôme de Pochhammer de 2e espèce (degré y) :

```
PPOC =: 3 : 'if. y=0 do. 1x else. spro/(1x, i.N),.
(0x,N$1x),.((>:,<:)N=.x:y)$0x end.'
```

Polynôme de Hilbert de 1e espèce (degré y) :

```
Phil1 =: 3 : '(!N)%~Ppoc N=:x: y'
```

Polynôme de Hilbert de 2e espèce (degré y) :

```
Phil2 =: 3 : '(!N)%~PPOC N=:x: y'
```

Polynôme de Boubaker (degré y) :

```
Pboub =: 3 : 'if. y=0 do. 1x else. |.(N+1){.2x svar (_1x^P)*(N-4x*P)*(P!N-P)%N-P=.i.1x+<.-:N=.x:y end.'
```

Polynôme de Legendre (degré y) :

```
Pleg =: 3 : '((!N)*2x^N)%~(sder^:N)((1x++:N){._1x 0 1) spui N=.x:y'
```

Fonction de Legendre associée (degré y) x= (N;p) (N : degré du pol de Legendre associé; p: paramètre inclus dans 0 1 2 … N) :

```
Flega =: 4 : '((d+1){.2x svar(-:p)sbin 1x+<.-:d)spro (sder^:p)(p+d=.x:y){.Pleg N=.x:>0{x[p=.x:>1{x'
```

Polynôme de Laguerre (degré y) et ***Laguerre généralisé*** (paramètre x et degré y) :

```
Plag =: 3 : ('0x Plag y',MD,'((-N);(x:x+1))sfhg N=.x:y')
```

Polynôme de Hermite (degré y) :

```
Pherm =: 3 : '(_1x^N)*(|N sdeg V)spro(sder^:N)V=.2x svar _1x ser +:N=.x:y'
```

Création d'une fonction à partir d'une série

```
FS  =:  ](sval"0 _)[
```

III – Exemples d'utilisation

Ex1: S(t) = sin(t) série limitée au degré 10

```
     3x ser 10x
0 1 0 _1r6 0 1r120 0 _1r5040 0 1r362880 0
```

Ex2: S(t) = Arctg(t) limitée au degré 12

```
     7x ser 12x
0 1 0 _1r3 0 1r5 0 _1r7 0 1r9 0 _1r11 0
```

Ex3: S(t) = Log(1+sh(t)) limitée au degré 11

```
     (2x ser 11x)scom(_3x ser 11x)
0 1 _1r2 1r2 _5r12 3r8 _16r45 83r240 _173r504 8375r24192
_5011r14175 147017r403200
```

Ex4: S(t) = exp(exp(t)-cos(t))/(1+sin(t)-sh(t)) degré max 9

```
     S=.(1x ser 9x)scom((1x ser 9x)ssou (4x ser 9x)
     [S=.S sq (26x ser 9x)sadd(3x ser 9x)ssou(_3x ser 9x)
1 1 3r2 5r3 37r24 43r30 889r720 2459r2520 31217r40320 187r315
```

Ex5: S(t) = t/Log(1+t) limitée au degré 10

```
      sinv}.2x ser 11x
1 1r2 _1r12 1r24 _19r720 3r160 _863r60480 275r24192
_33953r3628800 8183r1036800 _3250433r479001600
```

Ex6: S(t) = 1/ch(Log(1+sin(t)) limitée au degré 9

```
      sinv(_4x ser 9x)scom(2x ser 9x)scom(3x ser 9x)
1 0 _1r2 1r2 _1r12 _1r4 97r360 _17r240 _559r5040 841r6048
```

Ex7: $S(t)=\int_0^t \frac{zdz}{\log(1+z)}$ limitée au degré 11

```
      0x spri sinv}.2x ser 11x
0 1 1r4 _1r36 1r96 _19r3600 1r320 _863r423360 275r193536
_33953r32659200 8183r10368000 _3250433r5269017600
```

Ex8: Série de la ft de Lambert Lamb0(t) limitée au degré 10

```
     13x ser 10x
0 1 _1 3r2 _8r3 125r24 _54r5 16807r720 _16384r315 531441r4480
_156250r567
```

Ex9: Série de la ft de Lambert Lamb1(t) limitée au degré 10

```
     _13x ser 10x
0 1 1 3r2 8r3 125r24 54r5 16807r720 16384r315 531441r4480
156250r567
```

Ex10: Séries des Fonctions de GUDERMANN limitées au degré 12

a) $Gud\,0(t)$

```
    22x ser 12x
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

$Gud\,0(t)=Argsh(tg(t))$

```
    (_6x ser 12x)scom(5x ser 12x)
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

$Gud\,0(t)=2.Argth(tg(t/2))$

```
    2x*(_7x ser 12x)scom(2x sdiv 5x ser 12x)
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

$Gud\,0(t)=\log(tg(t)+1/\cos(t))$

```
    (2x ser 12x)scom(0x,}.(5x ser 12x)sadd(10x ser 12x))
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

$Gud\,0(t)=Argth(\sin(t))$

```
    (_7x ser 12x)scom(3x ser 12x)
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

$Gud\,0(t)=\int_0^t \frac{dz}{\cos(z)}$

```
    0x spri(10x ser 11x)
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

$Gud\,0(t)=(Gud\,1(t))^{-1}$

```
    srec _22x ser 12x
0 1 0 1r6 0 1r24 0 61r5040 0 277r72576 0 50521r39916800 0
```

b) $Gud\,1(t)$

```
    _22x ser 12x
0 1 0 _1r6 0 1r24 0 _61r5040 0 277r72576 0 _50521r39916800 0
```

$Gud\,1(t)=Arctg(sh(t))$

```
    (7x ser 12x)scom(_3x ser 12x)
0 1 0 _1r6 0 1r24 0 _61r5040 0 277r72576 0 _50521r39916800 0
```

$Gud\,1(t)=\arcsin(th(t))$

```
    (6x ser 12x)scom(_5 ser 12x)
0 1 0 _1r6 0 1r24 0 _61r5040 0 277r72576 0 _50521r39916800 0
```

$Gud\,1(t)=2.Arctg(th(t/2))$

```
    (2x*7x ser 12x)scom(2x sdiv _5x ser 12x)
0 1 0 _1r6 0 1r24 0 _61r5040 0 277r72576 0 _50521r39916800 0
```

$Gud\,1(t)=\int_0^t \frac{dz}{ch(z)}$

```
    0x spri(_10x ser 11x)
0 1 0 _1r6 0 1r24 0 _61r5040 0 277r72576 0 _50521r39916800 0
```

$Gud\,1(t)=(Gud\,0(t))^{-1}$

```
    srec 22x ser 12x
0 1 0 _1r6 0 1r24 0 _61r5040 0 277r72576 0 _50521r39916800 0
```

Les 2 fonctions de Gudermann sont réciproques :

$Gud\,0(Gud\,1(t))=t$

```
    (22x ser 12x)scom(_22x ser 12x)
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      NB. Série réduite à t
```

$Gud\,1(Gud\,0(t))=t$

```
    (_22x ser 12x)scom(22x ser 12x)
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      NB. Série réduite à t
```

Intégrales elliptiques complètes :

Ex11: (π/2)ELK(t)= $\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-z^2\cdot t^2)}}$ *(1e espèce)* limitée au degré 10

```
    27x ser 10x
1 0 1r4 0 9r64 0 25r256 0 1225r16384 0 3969r65536
```

Ex12: (π/2)ELE(t)= $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-z^2.t^2}{1-z^2}}\,dz$ *(2[e] espèce)* limitée au degré 10

```
    _27x ser 10x
1 0 _1r4 0 _3r64 0 _5r256 0 _175r16384 0 _441r65536
```

Fonction d'Airy :

Ex13: Airy0(t) Série limitée au degré 15

```
    12x ser 15x
1 0 0 1r6 0 0 1r180 0 0 1r12960 0 0 1r1710720 0 0 1r359251200
```

Ex14: Airy1(t) Série limitée au degré 15

```
    _12x ser 15x
0 1 0 0 1r12 0 0 1r504 0 0 1r45360 0 0 1r7076160 0 0
```

Ex15: exp(1-cos(t)) Série limitée au degré 10

```
    33x ser 10x
1 0 1r2 0 1r12 0 1r720 0 _43r40320 0 _127r1814400
```

Ex16: Log(tg(t)/t) Série limitée au degré 8

```
    30x ser 8x
0 1r3 _1r18 59r405 _77r1620 592r8505 _24529r765450
13588r382725 _183847r9185400
```

Fonctions de Bessel modifiées:

Ex17: 1[e] espèce

$Fj_5(t)=5!(2/t)^5 J_5(t)$ Série limitée au degré 10

```
    5x sbess1 10x
1 0 _1r24 0 1r1344 0 _1r129024 0 1r18579456 0 _1r3715891200
```

2^e espèce

$Fi_5(t)=5!(2/t)^5 I_5(t)$ Série limitée au degré 10

```
5x sbess2 10x
1 0 1r24 0 1r1344 0 1r129024 0 1r18579456 0 1r3715891200
```

1^e espèce

$Fj_0(t)=J_0(t)$

```
0x sbess1 10x
1 0 _1r4 0 1r64 0 _1r2304 0 1r147456 0 _1r14745600
```

1^e espèce

$Fj_1(t)=\left(\frac{2}{t}\right)J_1(t)$

```
1x sbess1 10x
1 0 _1r8 0 1r192 0 _1r9216 0 1r737280 0 _1r88473600
```

Ex18: $P_6(t)$ polynôme de Legendre

```
Pleg 6x
_5r16 0 105r16 0 _315r16 0 231r16
```

Ex19: $L_7(t)$ Polynôme de Laguerre

```
Plag 7x
1 _7 21r2 _35r6 35r24 _7r40 7r720 _1r5040
```

Ex20: $L_5^3(t)$ Polynôme de Laguerre généralisé

```
3x Plag 5x
1 _5r4 1r2 _1r12 1r168 _1r6720
```

Ex21: Polynômes de Hermite

$H_6(t)$ Degré pair

```
Pherm 6x
_120 0 720 0 _480 0 64
```

$H_5(t)$ Degré impair

```
Pherm 5x
0 120 0 _160 0 32
```

Ex22: $E_6(t)$ Polynôme d'Euler

```
Peul 6x
0 _1r240 0 1r144 0 _1r240 1r720
```

Ex23: $B_7(0{,}4)$ ***Polynôme de Bernoulli*** de degré 7

```
Pber 7x
0 1r6 0 _7r6 0 7r2 _7r2 1
2r5 sval Pber 7x
1183r78125
0.4 sval Pber 7x
0.0151424
```

Ex24: Calcul de sin(2r5)

P 18 *NB. 18 chiffres en flottant*

NB. Les chiffres soulignés peuvent être supposés exacts

Flot E 2r5 sval 3x ser 10x *NB. Degré maxi 10*

2156251954r5537109375 *NB. Résultat rationnel*

0.38941834230970018 *NB. Résultat en flottant*

Flot E 2r5 sval 3x ser 15x *NB. Degré maxi 15*

6898321680942342947r17714424133300781258

0.38941834230865047

Flot E 2r5 sval 3x ser 25x *NB. Degré maxi 25*

186605504452276436808482490392799946r47919033126686699688434600830078125

0.38941834230865047

Flot E 2r5 sval 3x ser 50x *NB. Degré maxi 50*

5979593811884579015514585633389473998023833075993003357920437686885820958661723365 8r15355193020531095425640080178993168972398346977525918077844835352152585983276367 1875

0.38941834230865047

Flot E 2r5 sval 3x ser 135x *NB. Degré maxi 135*

8836212426110966328263822213587909661751883100429765420344892544807525092677963247808106843290138042905186510238443043124906664407813563611794618508840064751929811389665260471606833138034972931235851160621231652481731013281348731245231671870097020447823652...

0.38941834230865052

1 o. 2r5 *NB. Vérification*

0.38941834230865052

Ex25: Nombres de Bernoulli jusqu'à l'ordre 25

Nber 25x

1 _1r2 1r6 0 _1r30 0 1r42 0 _1r30 0 5r66 0 _691r2730 0 7r6 0 _3617r510 0 43867r798 0 _174611r330 0 854513r138 0 _236364091r2730 0

Ex26 : Nombres de Fibonacci jusqu'à l'ordre 25

Nfib 25x

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368 75025

Ex27: Nombres de Bell jusqu'à l'ordre 20

Nbell 20x

1 1 2 5 15 52 203 877 4140 21147 115975 678570 4213597 27644437 190899322 1382958545 10480142147 82864869804 682076806159 5832742205057 51724158235372

Ex28: Calcul avec des valeurs complexes de la variable:

cos(3/5) et sin(3/5) en utilisant la ft exponentielle exp(i.3/5)

```
     ((0j1)*3r5) sval (1x ser 10x)      NB. Degré max 10
0.825335614905142840.56464247348571428
```

```
     ((0j1)*3r5) sval (1x ser 18x)      NB. Degré max 18
0.825335614909678330.56464247339503537
     2 1 o. 3r5                         NB. Vérification
0.82533561490967833 0.56464247339503537
```

Ex29: Idem en extrayant les parties réelles et imaginaires des coefficients quand la variable t est remplacée par i.t

```
     3r5 sval sima (1x ser 10x)
0.56464247348571428
     3r5 sval sima (1x ser 18x)
0.56464247339503537
     3r5 sval sree (1x ser 10x)
0.82533561490514284
     3r5 sval sree (1x ser 18x)
0.82533561490967833
```

Ex30: Création des fonctions de Bessel $J_0(t)$ et $J_1(t)$ à partir des séries

```
     J0 =: (0x sbess1 25x)&FS
     J1 =: (-:0x,1x sbess1 25x)&FS
     P  3                 NB. Demande 3 chiffres affichés
     Flot J0 0 1 2 3 4 5 6 7 8
1 0.765 0.224 _0.26 _0.397 _0.178 0.151 0.3 0.172
     Flot J1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
0 0.44 0.577 0.339 _0.066 _0.328 _0.277 _0.00468 0.235
```

Tracé des courbes des fonctions de Bessel $J_0(t)$ et $J_1(t)$ pour t compris entre 0 et 8 :

```
     load 'plot'                        NB. 101 points caculés
'key J0(t),J1(t);title Fts de Bessel' plot (];(J0,:J1))8r100*i.101
```