Problème de la chèvre

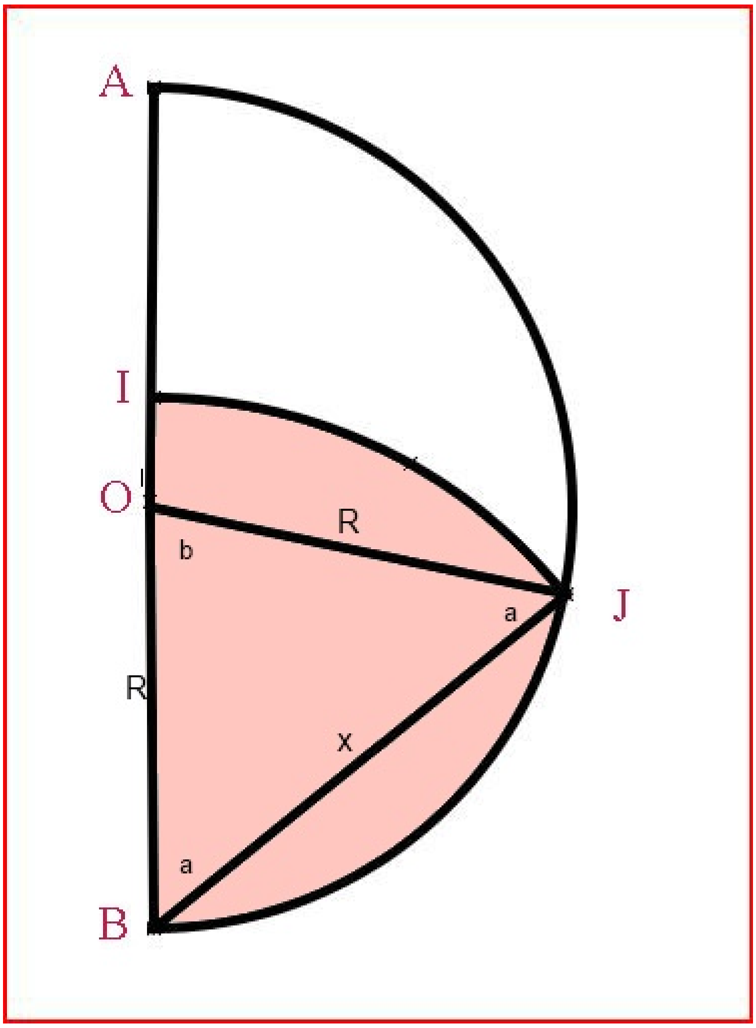
Robert Coquidé (09/05/2018)

Une chèvre est attachée par une chaîne à un piquet fixé sur la circonférence d'un champ circulaire.

Quelle est la longueur de la chaîne sachant que la chèvre peut brouter la moitié de la surface du champ ?

Remarque 1 : la longueur de la tête de la chèvre est négligeable, même si elle tend le cou !

Remarque 2 : seule l'imagination débordante d'un matheux peut concevoir un champ circulaire.



On raisonne sur un ½ cercle de rayon R.

Aire du demi-cercle $\pi R^2/2$. Le piquet est en B, longueur de chaîne x.
Le triangle AJB est rectangle en J, donc :

$\boxed{\mathbf{x = 2\ R\ cos(a)}}$

De plus, $b + 2\,a = \pi$
Au "pif" nous aurons $\pi/4 < b < \pi/2$ ou $\pi/4 < \pi - 2a < \pi/2$
Donc $\pi/2 < 2a < 3\pi/4$

Posons :

S1=surface limitée par le segment OB, l'arc BJ et le segment JO.

S2 = surface limitée par le segment BJ, l'arc JI et le segment IB.

S3 = surface du triangle OBJ.

S = surface broutable limitée par le segment IB, l'arc BJ et l'arc JI.
Nous avons : $S = S1 + S2 - S3 = \pi R^2/4$ Or :
$S1 = bR^2/2$; $S2 = ax^2/2$; $S3 = xR\sin(a)/2$ Donc :
$bR^2/2 + ax^2/2 - xR\sin(a)/2 = \pi R^2/4$ et
$bR^2/2 + 4R^2a\cos^2(a)/2 - 2R^2\sin(a)\cos(a)/2 = \pi R^2/4$

On simplifie par $R^2/2$: $b + 4a\cos^2(a) - 2\sin(a)\cos(a) = \pi/2$
or $b = \pi - 2a$ et $2\cos^2(a) = 1 + \cos(2a)$; $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
(formules de trigo bien connues… par ceux qui les connaissent !)
D'où :
$\pi - 2a + 2a(1 + \cos(2a)) - \sin(2a) = \pi/2$ et … enfin : $\pi/2 + 2a\cos(2a) - \sin(2a) = 0$ Si on pose :

$\boxed{\mathbf{t = 2a \quad avec \quad 1{,}57 = \pi/2 < t < 3\pi/4 = 2{,}36}}$
on obtient :

$\boxed{\mathbf{\pi/2 + t\cos(t) - \sin(t) = 0}}$

La connaissance de t, donc de a, permettra de calculer x … et de résoudre le problème.
Mais c'est une équation dite transcendante qui ne se résout pas exactement. On peut obtenir une approximation aussi précise que l'on voudra par une méthode itérative (en partant d'une valeur approchée, on en trouve une meilleure … et on continue … jusqu'à … ce que l'on se considère comme fatigué !).
On cherche t , racine de la fonction f(t) dont la dérivée est évidente :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{f(t) = \pi/2 + t\cos(t) - \sin(t)} \\ \mathbf{f'(t) = -\ t\sin(t)} \end{array}}$$

On utilise pour cela la formule de NEWTON :

$\boxed{\mathbf{F(t) = t - f(t)\ /\ f'(t)}}$

Programmation en langage J

(J comme « Jénial » !)

```
 f =:  3 :  '1r2p1+(y*2 o. y)-1 o. y'
f1 =:  3 :  '-y*1 o. y'
 F =:  3 :  'y - (f y)%(f1 y)'
```

NB. f1 pour f' ; y remplace t

Exécution :

```
        ,. F ^: (i.5) 2
2
1.90608420958514
1.90569574261839
1.90569572930988
1.90569572930988
```

t doit être situé entre 1,57 et 2,36. On est parti de t0 = 2 (au pif)

On obtient t1 = 1,9060… puis :

t2 = 1,9056957… puis :

t3 = 1,90569572930988 valeur confirmée à l'itération suivante et adoptée pour le t cherché.

La méthode de NEWTON est très performante.

On termine avec :

a = t/2 = 0,95284786465494 (en rd) et :

2cos(a) = 1,15872847301812

Donc :

$\boxed{\text{X = 1,15872847301812.R}}$

Pauvre chèvre !

CQFD