

## IMAGES DE FRACTALES AVEC APL2 IBM POUR WINDOWS

Claude Chachaty

L'importance du concept d'objet fractal, introduit dans les années soixante dix par Mandelbrot [1], provient de ce que la plupart des objets naturels ont une structure fractale alors que les objets fabriqués sont en majorité Euclidiens. Pour préciser ce concept, citons la définition qu'en donne Mandelbrot [2] : « FRACTAL . *adj.* Sens intuitif. Se dit d'une figure géométrique ou d'un objet naturel qui combine les caractéristiques que voici. A) Ses parties ont la même forme ou structure que le tout à ceci près qu'elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées. B) Sa forme est, soit extrêmement irrégulière, soit extrêmement interrompue ou fragmentée, et le reste, quelle que soit l'échelle d'examen. C) Il contient des «éléments distinctifs » dont les échelles sont très variées et couvrent une très large gamme... ».

L'intérêt scientifique et l'aspect esthétique des fractales ont motivé la conception de nombreux algorithmes pour les modéliser, dont on peut trouver des exemples dans [3]. Pour être satisfaisantes, ces représentations nécessitent des dizaines et parfois des centaines de milliers de points généralement calculés par des méthodes itératives. Il en résulte la saturation de la zone de travail ou un temps de calcul prohibitif en APL pour PC. Ces difficultés tendent à disparaître du fait de la progression rapide des performances des ordinateurs personnels. Reste la question du graphique pour lequel le plus répandu des tableurs, EXCEL, ne convient pas toujours. Ce problème peut être en grande partie résolu en utilisant la zone GRAPHPAK du logiciel APL2 pour WINDOWS d'IBM [\[1\]](#). Trois fonctions de cette zone sont particulièrement utiles pour la représentation des fractales :

SPLIT : représente un tableau  $XY_1Y_2...Y_n$  en courbes continues ou en points.

SURFACE : représente une surface  $F(X,Y)$  en perspective.

CONTOUR : projette les courbes de niveaux de  $F(X,Y)$  dans le plan XY.

Pour une zone de 32 Mo, la taille limite des graphiques obtenus avec ces fonctions est de l'ordre de 100000 points.

Des courbes ou des surfaces fractales de formes très complexes, faisant l'objet d'études mathématiques sophistiquées, sont souvent obtenues à partir d'algorithmes d'une grande simplicité; nous en donnons quelques exemples en version APL2.

On peut classer en deux catégories principales les fractales : les fractales déterministes ou à homothétie interne et les fractales aléatoires [3].

Les fractales déterministes sont généralement obtenus par itération d'une fonction analytique  $F(z)$  de la variable complexe  $z = x + iy$  ( $x+11oy$  en APL IBM). A chaque itération on assigne à  $x$  et à  $y$  les parties réelle (Re) et imaginaire (Im) de  $F(z)$  ( $9\circ F$  et  $11\circ F$  en APL IBM) et on utilise ces valeurs pour calculer  $F(z)$  à l'itération suivante [4, 5]

L'exemple classique de fractale déterministe est l'ensemble de Mandelbrot de  $z^2 + c$ .  $c$  est un élément d'un vecteur complexe dont la dimension détermine le nombre de points du graphique. Dans la fonction MSET, pour chaque élément indiqué par  $j$  de ce vecteur, on itère le calcul de  $R^2 = x^2 + y^2$  jusqu'à ce que  $R^2$  atteigne une valeur élevée, fixée arbitrairement. Le nombre d'itérations  $n$  limité à  $n = NMAX$  et porté en fonction de  $ReC$  et  $ImC$ , constitue le tableau à représenter, nommé par la suite FXY.

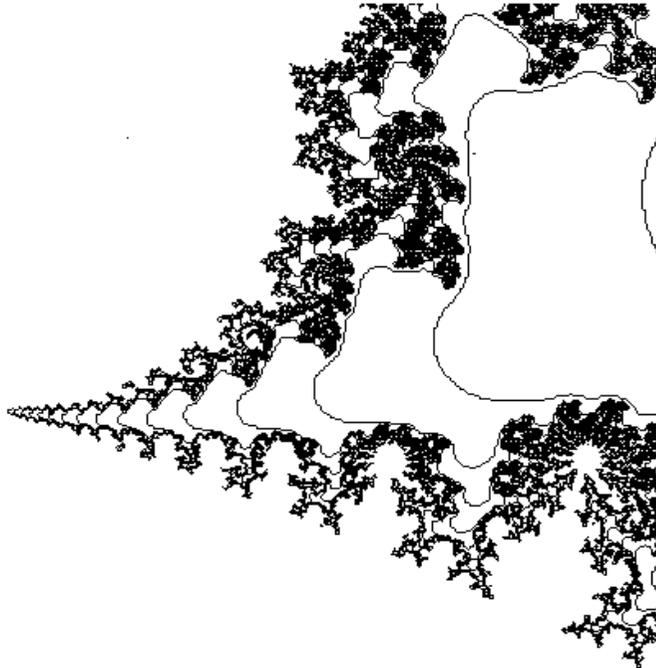
```

∇ MSET;∅IO;n;j;CH;x;y;z
[1]  ∅IO←1 ∅ CH←0
[2]  L0:'Avec potentiel ? [1]' ∅ eq←∅
[3]  'Xmin Xmax :' ∅ (Xmin Xmax)←∅
[4]  'Ymin Ymax' ∅ (Ymin Ymax)←∅ ∅ →(CH=1)/L1
[5]  'Nombre de points en X et en Y :' ∅ NPT←∅
[6]  L1:TXY←Xmin,Xmin+((Xmax-Xmin)÷NPT-1)×∅NPT-1
[7]  TXY←,TXY∅.,Ymin,Ymin+((Ymax-Ymin)÷NPT-1)×∅NPT-1
[8]  dim1←∅TXY ∅ →(CH=1)/L2
[9]  'Nombremax d'itérations : ' ∅ NMAX←∅
[10] L2:j←1 ∅ POT←nit←∅0 ∅ t0←∅AI[2]
[11] L3:(cx cy)↔TXY[j] ∅ x2←y2←x←y←n←0
[12] L4:n←n+1
[13] z←x+∅1∅y ∅ x2←x×x←cx+9∅z★2 ∅ y2←y×y←cy+11∅z★2
[14] →((n<NMAX)∧10000>x2+y2)/L4
[15] ∅(eq≠1)/'dim2←∅nit←nit,n'
[16] ∅((eq=1)∧n<NMAX)/'pot←0.5×(∅x2+y2)÷2★n'
[17] ∅((eq=1)∧n=NMAX)/'pot←0'
[18] ∅(eq=1)/'dim2←∅POT←POT,pot'
[19] →(dim1≥j←j+1)/L3
[20] 'Durée (s) : ',0.001×∅AI[2]-t0
[21] ∅(eq≠1)/'FXY←(2∅dim2★0.5)∅nit'
[22] ∅(eq=1)/'FXY←(2∅dim2★0.5)∅POT'
[23] L5:'Plot sections [1], surface [2], niveaux [3] ? '
[24] ∅(1=srf←∅)/'SECTIONS'
[25] ∅((srf=2)/'SURF'),(srf=3)/'NIVEAUX'
[26] L6:'Domaine complexe [1], replot [2]'
[27] →(1 2=CH←∅)/L0,L5

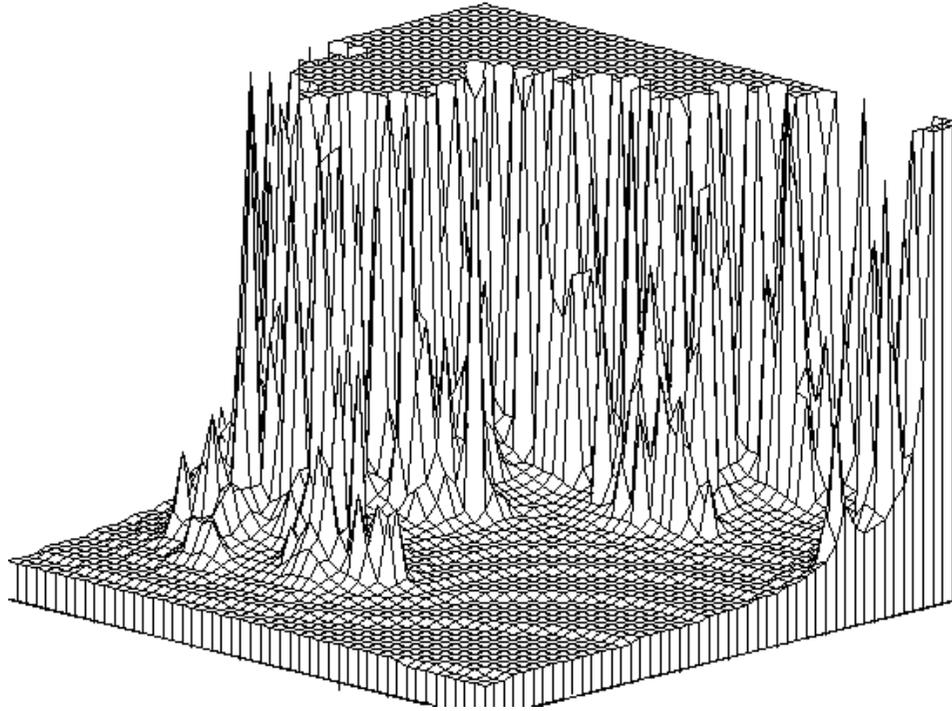
```

Les fonctions graphiques SURF et NIVEAUX sont des adaptations des fonctions SURFACE et CONTOUR mentionnées

plus haut. La fonction SECTIONS utilise SPLOT et découpe la surface FXY en éléments équidistants d'épaisseur  $\Delta Z$  avec projection dans le plan XY des points compris entre  $Z$  et  $Z+\Delta Z$  représentés par des symboles et des couleurs différents selon les niveaux.

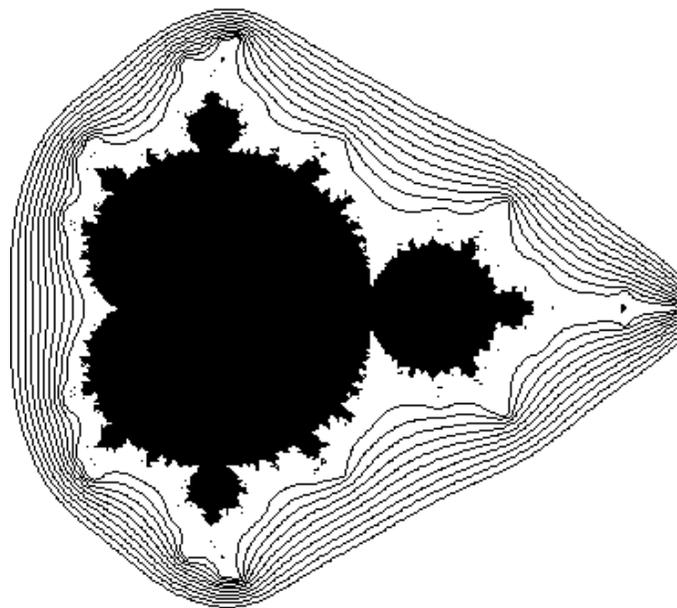


**Figure 1.** Courbes de niveaux de l'ensemble de Mandelbrot de  $z^2 + c$  dans le domaine  $0.33 \leq \text{Re}C, \text{Im}C \leq 0.39$ .



**Figure 2.** Ensemble de Mandelbrot de  $z^2 + c$  dans le domaine  $0.3 \leq \text{Re}C, \text{Im}C \leq 0.5$ .

L'option  $\text{eq} = 1$  de MSET construit FXY avec des valeurs égales au potentiel  $0.5(\ln(R^2))/2^n$  pour  $n < \text{NMAX}$  et nulles pour  $n = \text{NMAX}$ .



**Figure 3.** Représentation globale de l'ensemble de Mandelbrot de  $z^2 + c$  entouré de courbes équipotentielles, par la fonction MSET avec  $eq = 1$ .

Un algorithme assez semblable à celui utilisé pour MSET permet de représenter avec la fonction FONCZ les ensembles de Julia [5] de fonctions telles que  $\lambda \exp(z)$ ,  $\lambda \sin(z)$ ,  $\lambda \sinh(z)$  etc...où  $\lambda$  est un nombre complexe.

```

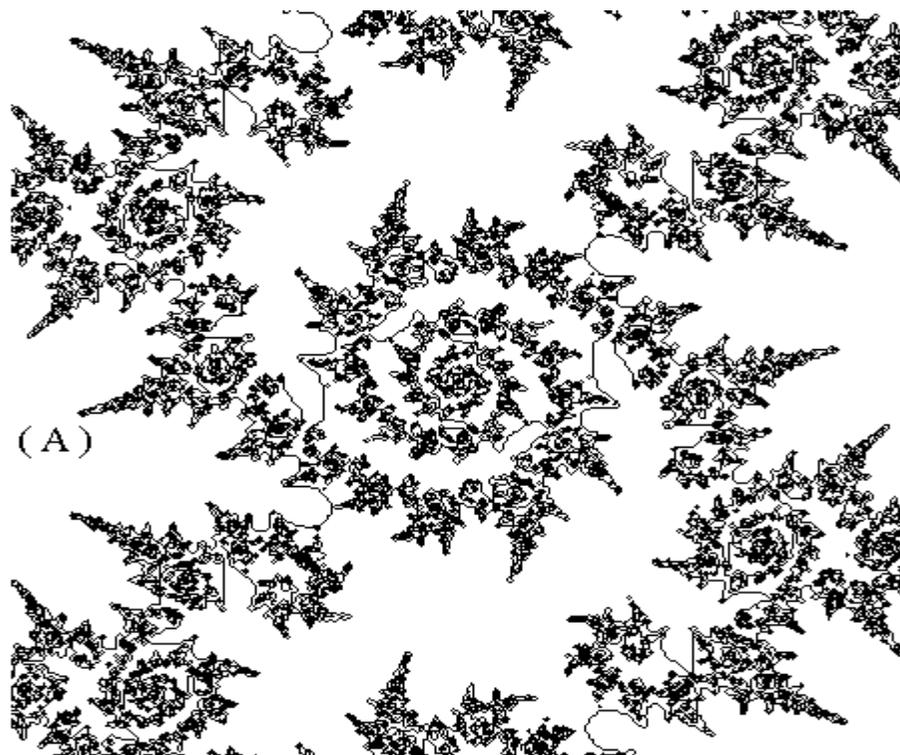
▽ FONCZ; □IO;n;j;CH;x;y;z;Z;F;R
[1]   □IO←1 ◇ CH←0 ◇ 'sin(Z) [1], cos(Z) [2], sinh(Z) [5]'
[2]   'cosh(Z) [6], autre fonction [0]'
[3]   ⚡(0=F←□) / '' Expression de F(z) : ' ' ◇ FZ←□'
[4]   L0:'Xmin Xmax : ' ◇ (Xmin Xmax)←□
[5]   'Ymin Ymax' ◇ (Ymin Ymax)←□
[6]   'Lambda (2 valeurs) : ' ◇ LAM←+/(1,-1101)×□
[7]   →(CH=1)/L1
[8]   'Nombre de points en X et en Y : ' ◇ (NPX NPY)←□
[9]   TXY←Xmin,Xmin+((Xmax-Xmin)÷NPX-1)×ιNPX-1
[10]  dim1←ρTXY←,TXY◦.,Ymin,Ymin+((Ymax-Ymin)÷NPY-1)×ιNPY-1
[11]  'Nombremax d'iterations : ' ◇ NMAX←□
[12]  L1:j←1 ◇ nit←ι0 ◇ t0←□AI[2]

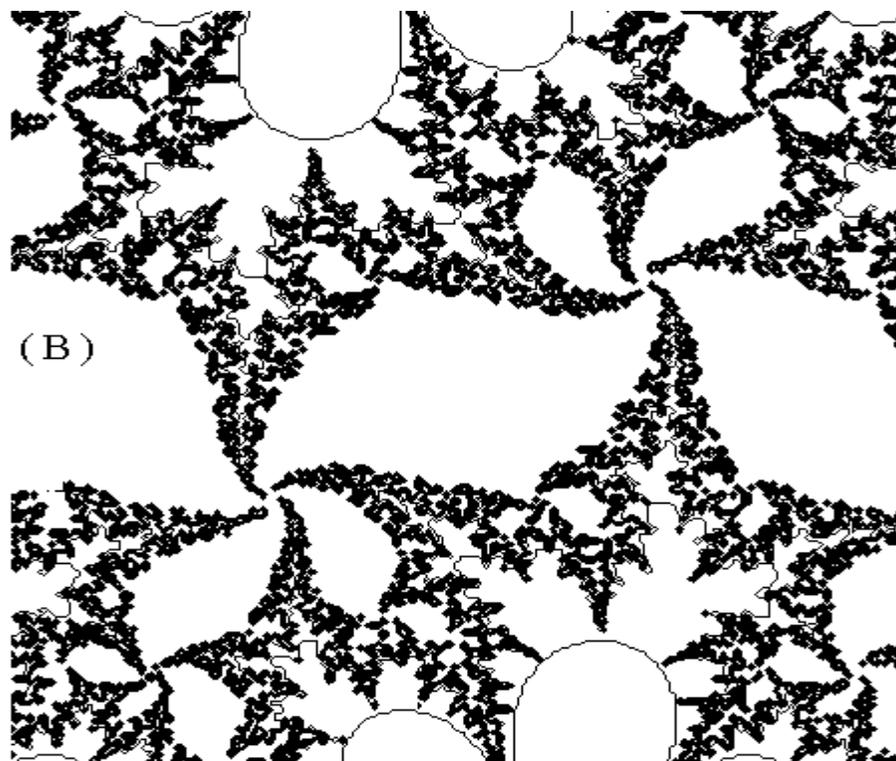
```

```

[13] L2:(x y)←TXY[j] ◇ n←0
[14] L3:n←n+1 ◇ z←x+-11oy
[15]  $\phi(F \neq 0) / 'Z \leftarrow LAM \times Foz'$  ◇  $\phi(F = 0) / 'Z \leftarrow LAM \times \phi FZ'$ 
[16] (x y)←(9 11)○Z ◇ R←x×x ◇ R←R+y×y ◇ R←R★0.5
[17] →((n<NMAX)∧50>R)/L3 ◇ dim2← $\rho$ nit←nit,n
[18] →(dim1≥j←j+1)/L2 ◇ 'Durée (s) : ',0.001× $\square$ AI[2]-t0
[19] FXY←(2 $\rho$ dim2★0.5) $\rho$ nit (la suite est identique à MSET)

```





**Figure 4.** Ensembles de Julia de : A)  $(1+0.5i)\sin(z)$  , B)  $(1+0.5i)\cosh(z)$ .

L'examen des images de fractales déterministes dans le plan XY montre clairement leur propriété d'autosimilarité : chaque détail d'une image est reproduit à une échelle différente. Dans le cas de fractales aléatoires tels qu'un solide poreux ou la mousse d'un liquide, cette propriété n'a qu'un caractère statistique. La répartition spatiale des pores ou des bulles est aléatoire mais la « hiérarchie » de leurs tailles est invariante avec l'échelle d'observation sur plusieurs ordres de grandeur; elle dépend de la *dimension fractale*  $D_f$  du système, dont Mandelbrot [2] donne la définition suivante :

« DIMENSION FRACTALE. *n.f.* *Sens générique.* Nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique ou d'un objet naturel et qui se réduit, dans le cas des objets de la géométrie usuelle d'Euclide, à leur dimensions usuelles. . . »

Les courbes et les surfaces fractales ont ainsi des dimensions  $1 < D_f < 2$  et  $2 < D_f < 3$  . La notion de dimension fractale est fondamentale en physique des milieux désordonnés car elle régit les phénomènes de diffusion et d'échange (voir par exemple [6, 7]). Dans le cas de fractales de surface comme certains adsorbants ou catalyseurs, leur rapport surface/volume et donc leur

efficacité sont d'autant plus grands que  $D_f$  est élevé. Ce rapport tend vers l'infini lorsque  $D_f$  approche la limite théorique de 3.

Parmi les méthodes utilisées pour représenter les courbes et les surfaces fractales aléatoires [8], la plus simple consiste à effectuer la transformée de Fourier inverse d'un vecteur ou d'un tableau de nombres complexes  $r_0 r_1 \exp(i\varphi)$  ( $r_0 \times r_1 \times^{-12} \circ \phi i$  en APL IBM) où  $r_1$  et  $\varphi$  sont des variables aléatoires et  $r_0$ , une fonction de  $D_f$ . La fonction FRACT2D, basée sur cette méthode, est destinée à représenter les surfaces fractales.

```

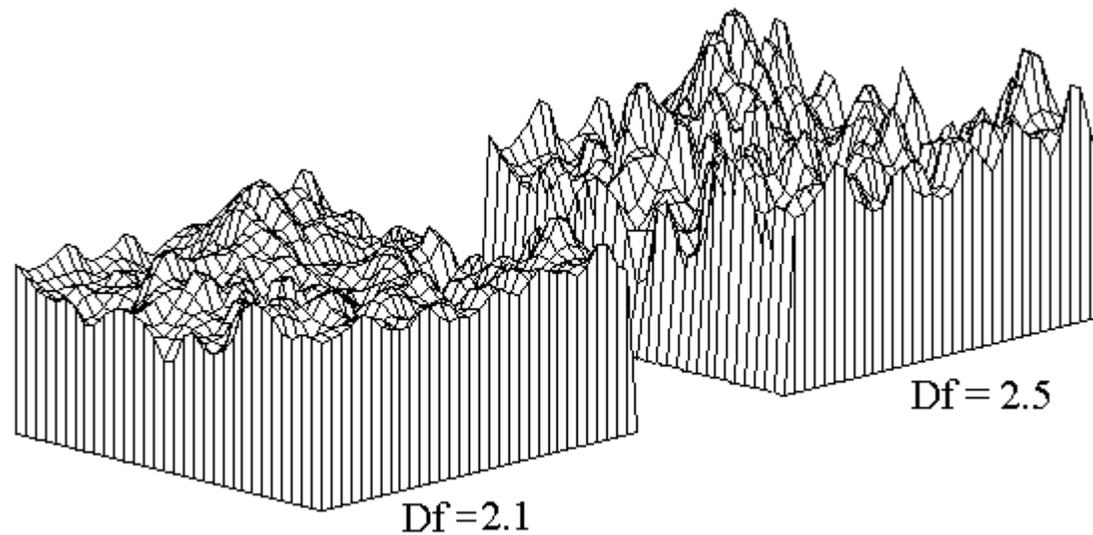
▽ FRACT2D;□IO;CH;p
[1]  □IO←1 ◇ CH←0 ◇ INITGAUSS
[2]  'Dimension en x et y du tableau (NP←2*entier) : '
[3]  p←p×p←ιNP←□
[4]  L0:'Dimension fractale 2<DF<3 : '
[5]  r0←(p◦.+p)★-0.5×4-DF←□ ◇ →(CH=1)/L1
[6]  r1←(NP,NP)ρGAUSSRND NP★2
[7]  phi←02×((ρ,r0)?2★31)÷2★31
[8]  L1:FXY←9◦IFFT2D r0×r1×(NP,NP)ρ-12◦phi
[9]  L2:'Nombre d''interpolations sinon 0 : '
[10]  ϕ(0≠nint←□)/'INTERP2D'
[11]  L3:'Plot sections [1], surface [2], niveaux [3] ? '
[12]  ϕ(1=srf←□)/'SECTIONS'
[13]  ϕ((srf=2)/'SURF'),(srf=3)/'NIVEAUX'
[14]  L4:'Autre dimension fractale [1], interpoler [2]'
[15]  'Replot [3]' ◇ →(1 2 3=CH←□)/L0,L2,L3

```

La fonction GAUSSRND génère du bruit gaussien à partir de paramètres contenus dans INITGAUSS, IFFT2D effectue la transformée de Fourier inverse du tableau  $r_0 r_1 \exp(i\varphi)$  dont on prend la partie réelle FXY.

La surface FXY peut être interpolée au moyen de la fonction INTERP2D. Il est possible d'effectuer plusieurs calculs en changeant la dimension fractale  $D_f$  qui n'intervient que dans  $r_0$  et en gardant les mêmes valeurs des variables aléatoires  $r_1$  et  $\varphi$ . Cela permet d'évaluer l'influence de  $D_f$  sur le relief d'une surface, sans modifier les coordonnées X et Y de ses éléments. On constate ainsi qu'en diminuant la dimension fractale d'un relief, on simule son érosion (figure 5).

Le relief terrestre est considéré comme fractal avec en moyenne  $D_f \approx 2.2$ . Il est possible de réaliser des paysages fictifs à partir d'images de synthèse de surfaces fractales déterministes ou aléatoires [1-3] obtenues par des méthodes dont font partie celles résumées dans cet article.



**Figure 5.** Influence de la dimension fractale sur le relief d'une surface. Les deux parties de l'image sont calculées avec la fonction FRACT2D pour les mêmes valeurs aléatoires de  $r_1$  et de  $\varphi$ .

Ces quelques exemples montrent qu'avec un PC d'un modèle récent et sans nécessairement connaître la programmation de graphiques, il est facile d'obtenir des images satisfaisantes de fractales avec GRAPHPAK. Ces images sont loin d'atteindre le niveau artistique de celles représentées dans des ouvrages spécialisés, mais peuvent être améliorées à l'aide par exemple du programme PAINT de WINDOWS.

### Références

- 1 - B. Mandelbrot. *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*. Flammarion, Paris 1975.
- 2 - B. Mandelbrot. *ibid.*, troisième édition suivie de *Survol du langage fractal*. Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion, Paris 1989 (ISBN 2-08-211188-1).

3 - M.F. Barnsley, R.L. Devaney, B.B. Mandelbrot, H.-O. Peitgen et D. Saupe.

*The science of fractal images*. Edité par H.O. Peitgen et D. Saupe, Springer-Verlag, Berlin, 1988 (ISBN 3-540-96608-0).

4 - H.-O. Peitgen dans [3] chap. 4 : *Fantastic deterministic fractals*.

5 - R.L. Devaney dans [3] chap. 3 : *Fractal patterns arising in chaotic dynamical systems*.

6 - A. Blumen, G. Zumofen et J. Klafter. *Random walks on fractals* dans *Structure and dynamics of molecular systems* pp. 87-100, édité par R. Daudel et al., D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1985 (ISBN 90-277-1977-2).

7 - C. Chachaty, J.-P. Korb, J.R.C. van der Maarel, W. Bras et J.P. Quinn,

*Fractal structure of a cross-linked polymer resin : A small-angle X-ray scattering, pulsed field gradient and paramagnetic relaxation study*.

Physical Reviews B. **44**, 4778-4793 (1991).

8 - D. Saupe dans [3] chap. 2 : *Algorithms for random fractals*.

---

[1] APL Products § Services, IBM Santa Teresa Laboratory, RENA/F40, 555 Bailey Ave. San Jose, CA 95141, USA