Structure des Nombres Réels bien Ordonnés

par F.Collot

Résumé

L'auteur utilise une application classique de l'ensemble des parties des entiers naturels N (noté P(N)) sur l'ensemble
procédé pour bien ordonner P(N) utilisant l'ordre lexicographique dont on sait qu'il ordonne totalement cet ensemble, ainsi

- Une première partition de l'ensemble est réalisée permettant de ranger dans une même classe (les clones) les parties

- Une seconde partition est basée sur l'utilisation des entiers manquants à «l'intérieur» de chaque partie, entiers appel
le concept de sous-ensemble de parties contenant un même nombre de lacunes, (sous-ensembles iso-lacunaires).

- Chaque sous-ensemble est constitué de suites infinies de parties bien ordonnées par l'ordre lexicographique. Ces sui
ordonnant leur premier terme selon l'ordre lexicographique inverse.

Pour obtenir un ensemble ayant la puissance du continu, apparaît alors la nécessité de considérer un sous-ensemble d
La solution consiste à modifier l'ordre de N en faisant l'union ordonnée de plusieurs de ces sous-ensembles infinis, et à main

* * *

Nous utiliserons l'application suivante de P(N) sur R :

D'abord, on associe à chaque partie p de N une suite pi = {an} (avec n ¦ 1) de nombres égaux à 1 ou 0, à savoir 1 si a
On obtient ainsi une suite finie ou infinie de 0 et de 1.

Puis on associe à chaque suite pi le nombre réel Sn an / 2n écrit en binaire et compris dans l'intervalle réel [0,1 n ¦

Rappelons qu'un ensemble E est bien ordonné s'il est totalement ordonné, et si tout sous-ensemble non vide de E a u

1.) UNE RELATION DE BON ORDRE SUR LES SS-ENS. n-LACUNAIRES

L'auteur propose, en premier lieu une relation d'ordre sur P(N) qui permet de bien ordonner le sous-ensemble des pa
de parties infinies, ce qui n'est, bien sûr, pas un exploit, mais va permettre d'éclairer le problème.

Nous représenterons les entiers naturels par les lettres d'un alphabet infini : a, b, c, ...n ...(n étant un entier quelconqu

1.1.) Une Première Partition de P(N) consiste à considérer une première classe d'équivalence rassemblant toutes les p
premier entier (désigné ici par la lettre a). Cette classe sera nommée «clone a». Une seconde classe rassemblera toutes les pa
nommée clone b, etc... Il existe une infinité dénombrable de clones. La relation d'ordre proposée s'appliquera de la même fa
considérerons ici que le clone a .

Pour bien ordonner ce clone, l'idée essentielle est de s'intéresser dans chaque partie non seulement aux entiers qu
entre le premier et le dernier de la partie (quand celui-ci existe !), et de les noter chacun par le symbole O (appelé «lacune»)
sans accolade.

1.2.) Une Deuxième Partition consiste, pour un même clone, à rassembler dans une même classe d'équivalence les p
Nous obtiendrons donc une suite de sous-ensemblesiso-lacunaires» présentant 0, 1, 2 ,...n...lacunes, appelés sous-ensembles
lacunaire, etc...

1.3.) Chaque Sous-Ensemble Iso-Lacunaire est constitué de suites de parties ayant leurs lacunes à des rangs identique
possédant les mêmes entiers manquants), ordonnées par la relation d'ordre lexicographique notée L (intuitivement il siagit d
symbole ne pourrait occurer qu'une seule fois à l'intérieur d'un même mot). C'est pour en faciliter la lecture que nous avon
l'alphabet.

1.3.1.) Le sous-ensemble 0-lacunaire

Ainsi la première suite du clone «a» sera :   a, ab, abc, ...abc...n, ...N

Cette suite est bien ordonnée par l'inclusion (et l'ordre lexicographique), comme toutes celles qui la suivent. Elle for ensemble 0-lacunaire dont le cardinal sera card.N.

Par ailleurs, l'ensemble N lui-même appartient à P(N). Sa place, comme élément maximal de cette première suite, est

1.3.2.) Le sous-ensemble 1-lacunaire

Le sous-ensemble suivant est le sous-ensemble 1-lacunaire, et comprend une infinité dénombrable de suites. Son car card.N. Ces suites sont elles-mêmes bien ordonnées en ordonnant leur premier élément suivant l'ordre lexicographique inve

a O c, a O cd, a O cde,...
ab O d, ab O de, ab O def, ...
abc O e, abc O ef, abc O efg, ...

En effet, l'ordre lexicographique direct L, après avoir bien ordonné le sous-ensemble 0-lacunaire qui ne possède qu'u d'obtenir aucun autre sous-ensemble iso-lacunaire bien ordonné, car alors ceux-ci n'ont pas de première suite. Par contre il e une dernière suite. D'où la nécessité d'inverser l'ordre d'apparition des premiers termes de chaque suite en utilisant l'ordre I

Dès à présent, on voit que le cardinal d'un sous-ensemble n-lacunaire est égal au cardinal du sous-ensemble qui le pr comme une règle générale.

1.3.3.) Le sous-ensemble 2-lacunaire

De même le sous-ensemble 2-lacunaire sera l'ensemble des suites de la forme:

a O O d, a O O de, a O O def,...
a O c O e, a O c O ef, a O c O efg,...
a O c d O f, a O cd O fg, a O cd O fgh, ...

Ainsi, lorsqu'on passe d'une suite à la suivante, la seconde lacune fait un pas à droite, et va parcourir l'ensemble des inverse fera apparaître un second «sous-sous-ensemble» 2-lacunaire :

ab O O e, ab O O ef, ab O O efg,...
ab O d O f, ab O d O fg, ab O d O fgh,...
ab O de O g, ab O de O gh, ab O de O ghi,...
...

Il est aisé de montrer que le cardinal de ce sous-ensemble 2-lacunaire est :

card.N x card.N2 = card. N3 (= card.N).

Remarque 1

Le plus petit élément de chaque sous-ensemble n-lacunaire (de type a O O O ...n) doit être considéré comme l'élémen L'engendrement se fait grâce aux deux relations d'ordre utilisées alternativement : l'ordre L-1 pour les premiers termes des s l'intérieur de chaque suite.

Remarque 2

Apparaît une propriété fondamentale relative à l'utilisation de l'ordre lexicographique inverse dans le classement des constituent au sein d'un même sous-ensemble n-lacunaire : depuis son plus petit élément (écrit ici en remplaçant tout entier p observe un recul de droite à gauche du second entier présent.

Donnons un exemple. Pour le sous-ensemble 6-lacunaire, le recul du second entier présent prendra l'aspect suivant :

```
* O O O O O O    *      ah}
* O O O O O * O *     {agi}
* O O O O * O O *     {afi}
* O O O * O O O *     {aei}
* O O * O O O O *     {adi}
* O * O O O O O *     {aci}
* * O O O O O O *     {abi}
```

Proposition

Tout sous-ensemble n-lacunaire a le cardinal dénombrable card. Nn+1 = card. N.

Preuve par récurrence : la proposition est vraie pour n = 0 et pour n = 1. Supposons qu'elle soit vraie pour un sous- serait card.Nn. Pour son successeur n-lacunaire, une lacune doit être ajoutée à chaque élément du premier. Si cette nouvelle l bien déterminé, le nouveau cardinal resterait identique. Mais cette nouvelle lacune doit remplacer une infinité de nombres en au précédent multiplié par le cardinal de N c'est-à-dire qu'il sera égal à card.Nn+1.

Alors, une telle relation permet de bien ordonner toutes les parties finies de N, et certaines parties infinies. Ces derniè d'un ensemble isomorphe à N dont on aurait soustrait un nombre fini d'entiers. L'existence de telles parties est évidente et le maximal de chacune des suites de l'ensemble des sous-ensembles n-lacunaires.

Cependant, il n'est pas possible d'expliciter un seul élément de P(N) qui ait une infinité de lacunes, puisque les entier qu'un nombre fini d'entiers.

2.) LE SOUS-ENSEMBLE ω-LACUNAIRE.

Ce qui, d'après notre analyse, «manque» à l'ensemble N c'est la présence d'entiers survenant «après» une infinité d' pour les premiers d'avoir des prédécesseurs immédiats, afin d'assurer un recul indéfini du 2ème entier présent à partir du p alors possible de modifier l'ordre naturel de N, en faisant l'union ordonnée de plusieurs de ses sous-ensembles infinis (par ex décroissant, puis les nombres impairs moins les précédents en ordre décroissant, enfin les nombres pairs sauf 2 en ordre croi son intégralité. Le type d'ordre de ce nouvel ensemble Ni est : 1 + *w + *w +w (où w désigne le type d'ordre des entiers na

Ni = {2, 5,11, ...,13, 7, 3, ..., 15, 9, 1, 0, 4, 6, 8,...} (1)

Il est clair alors que les parties de Ni utilisant le nombre 2 puis les entiers impairs non premiers, ou les entiers pairs, a nombres premiers (sauf 2).

En vue de faciliter la lecture de Ni, nous emprunterons la notation (mais seulement la notation) utilisée en analyse no arbitrairement le 0 de (1) . De plus chaque élément sera représenté par référence à N. On a :

Ni = {a, c, e, ... f, d, b,...N-3, N-2, N-1, N, N+1, N+2, N+3, ...N+n, ...} (3)

* la démonstration classique utilise les termes n et n+1. La nôtre utilise n-1 et n parce que plus simple ici.

Ayant obtenu un bon ordre sur les sous-ensembles n-lacunaires, à partir de N bien ordonné, nous réserverons Ni au tr

2.1.) Le sous-ensemble ω-lacunaire du clone «a» avec un N donné (ens.G)

Soit «G» le sous-ensemble ω-lacunaire du clone «a» avec un N donné.

Dans ces conditions, le plus petit élément de ce sous-ensemble du clone a s'écrira :

{a ÑO N} où «ÑO» désigne l'infinité de lacunes séparant a de N

2.1.1.) Les sous-sous-ensembles n-post-ω-lacunaires de G

Le sous-sous-ensemble 0-post -ω-lacunaire

La première suite :

{ a ÑO N}, {a ÑO N, N+1}, {a ÑO N, N+1, N+2}... (1)

Cette première suite sera bien ordonnée par l'ordre L.

Il existe un isomorphisme entre cette première suite et l'unique suite du sous-ensemble 0-lacunaire :

a a b a b c

Le cardinal de chacun de ces deux sous-ensembles sera : card.N.

Les suites vont se succéder de la même façon que les suites des ensembles n-lacunaires i-e en ordonnant leur premier L-1. Dans chaque suite, les éléments sont ordonnés par l'ordre L, i-e par l'inclusion.

Le sous-sous-ensembles 1-post-ω-lacunaire ..

Après la première suite (1) ci-dessus, viennent des sous-sous-ensembles de parties de Ni dans lesquelles vont apparaî plusieurs entiers impairs non premiers. Ces parties seront appelées «n-post-ω-lacunaires» (avec n = 1,2,3,...). En écrivant se aurons :

{a ÑO N-1 O N+1} ...
{a ÑO N-1 N O N+2} ...
{a ÑO N-1 N N+1 O N+3}...

Il existe là aussi un isomorphisme avec le sous-ensemble 1-lacunaire :

a O c
a b O d
a b c O e

Le cardinal de ces deux sous-ensembles sera : card.N2.

Le sous-sous-ensemble 2-post-ω-lacunaire

Puis l'ordre L-1 fera apparaître un sous-sous-ensemble 2-post-ω-lacunaire :

{a ÑO N-2 O O N+1} ...
{a ÑO N-2 O N O N+2} ...
{a ÑO N-2 O N N+1 O N+3} ..
...

Nous aurons ensuite un nouveau sous-sous-ensemble :

{a ÑO N-2 N-1 O O N+2}...
{a ÑO N-2 N-1 O N+1 O N+3} ...
{a ÑO N-2 N-1 O N+1 N+2 O N+4} ...
...

Puis :

{a ÑO N-2 N-1 N O O N+3} ...
{a ÑO N-2 N-1 N O N+2 O N+4} ...
{a ÑO N-2 N-1 N O N+2 N+3 O N+5} ...
...

Il existe un isomorphisme entre ce sous-ensemble et le sous-ensemble 2-lacunaire :

a O O d
a O c O e
a O c d O f
..
a b O O e
a b O d O f
a b O d e O g
...
a b c O O f
a b c O e O g
a b c O e f O h
...

Le cardinal de ces deux sous-ensembles sera : card. N3. Et ainsi de suite.

Ainsi, à chaque sous-ensemble n-lacunaire correspond un sous-sous-ensemble n-post-ω-lacunaire, ce qui pourrait fair reste aussi dénombrable. Mais nous allons voir que ce n'est pas possible.

2.1.2) Le sous-ensemble ω-post-ω-lacunaire de G

Il existe donc un isomorphisme évident entre chaque sous-ensemble n-lacunaire et le sous-sous-ensemble n-post-ω-la d'isomorphisme entre l'ensemble ω-lacunaire G et l'ensemble de tous les sous-ensembles n-lacunaires. En effet il est possib puisse pas être mis en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble n-lacunaire quelconque : c'est le sous-ensemble ω lorsque le 2ème entier présent a reculé jusqu'à l'entier 3) et dont le plus petit élément est : {a ÑO, N-ω, ÑO   N+1}.

Dans Ni, cet élément s'écrira : {2, ÑO, 3, ÑO,   4 } correspondant au réel 0,1000...1000...1 (distinct de {2,3,4}ou {b 0,0111).

Ainsi, G n'est plus dénombrable (ce procédé est identiqueàcelui de la diagonale de Cantor). De plus G est bien ordon ensembles n-post-ω-lacunaires qui précèdent immédiatement cet élément est identique à celle des sous-ensembles n-lacunai

Le cardinal de G doit donc être le successeur immédiat de cette suite. Ce ne peut être que card. Ncard.N, c'est-à-dire

Justification d'un bon ordre sur P(N)

Il suffit d'appliquer le théorème de Fraenkel : «un ensemble est bien ordonné si et seulement s'il n'a aucun sous-ense

Remarque

Pour faire apparaître des irrationnels «attendus» c'est-à-dire où les1 (sauf le premier) puissent occurer avant l'infinit pour accéder à ces nombres, il a été nécessaire de faire suivre le premier entier de chaque partie (celui qui désigne le clone) 23, etc ...choisis un sur deux dans l'ensemble des nombres premiers. Mais ce faisant, une «coupure» s'installe entre les deux gauche étant rangé par ordre croissant, celui de droite par ordre décroissant. Cette coupure ne permet plus d'obtenir pour le p plus petit élément, et donc de bon ordre. C'est pourquoi il est nécessaire d'étendre le concept de «clone», (réservé jusqu'alo à l’ensemble des éléments n-lacunaires de P(N). C’est ainsi qu’il faudra considérer outre les clones a, b, c, etc, ... des OOd, etc,... Ceux-ci permettront d’écrire des irrationnels commençant par exemple par : 0, 01010011000... (correspondant a

Conclusion

Ainsi, chaque clone de l’ensemble P(N) et pour un N donné, apparaît, une fois bien ordonné, comme constitué :

1) par un segment initial dénombrable de sous-ensemble n-lacunaires qui correspond aux rationnels.

2) par un segment «moyen» de sous-ensembles n-post-ω-lacunaires qui correspond (si l’on considère isolément le so dénombrable d’irrationnels.

3) par un segment terminal non dénombrable et ayant la puissance du continu correspondant à la majeure partie des ir

L’intérêt pratique (et notamment en informatique) de ce bon ordre serait de ce qu’entre deux réels (et notamment irra immédiat du premier, il n’existe aucun nombre réel, et qu’en conséquence, les réels et plus particulièrement les irrationnels p Ainsi, dans cet ordre (qui n’a rien à voir avec l’ordre habituel par grandeur), l’élément ω-lacunaire {a,ÑO, N} est l’élément N, N+1}. L’élément 1-lacunaire {a O c} qui correspond au rationnel 0, 101 est le prédécesseur immédiat de {a O cd} qui co

Par ailleurs, mais cela n’est pas négligeable, les sous-ensembles de P(N) sont de deux sortes seulement :

- ou bien ils sont dénombrables comme les sous-ensembles n-lacunaires, ou les sous-sous-ensembles n-post-ω-lacuna ensembles ω-lacunaires G,

- ou ils ont la puissance du continu. Ce sont les ensembles G.

Il en découle que l’Hypothèse du Continu est vraie, quoique restant indécidable dans le système formel de la théorie a du choix).

Correspondance entre P(N) et R bien ordonnés

P(N)	Rationnels	P(N) (ens. ω-lac.)	Irrationnels
Clone a			
a	0,1	a,ÑO, N	0,1000...1
a O c	0,101	a,ÑO, N-1 O N+1	0,1000...101
a OO d	0,1001	a,ÑO, N-2 OO , N+1	0,1000...1001
...	...	...	
		a,ÑO, N-ω, ÑO, N+1	0,1000...1000...1
		a,ÑO, N-ω, ÑO, N-1 O N+1	0,1000...1000...101
Clone ab			
ab	0,11	ab, ÑO, N	0,11000...1
ab 0 d	0,1101	ab, ÑO, N-1 O N+1	0,11000...101
...	...	...	
		ab, ÑO, N-ω, ÑO, N+1	0,11000...1000...1
Clone abc			
abc	0,111	abc, ÑO, N	0,111000...1
abc O e	0,11101	abc, ÑO, N-1 O N+1	0,111000...101
...	...	abc, ÑO, N-ω, ÑO, N+1	0,111000...1000...1
...			
Clone aOc			
a O c	0,101	a O c, ÑO, N	0,101000...1
a O c O e	0,10101	a O c, ÑO, N-1 O N+1	0,101000...101
...	...	...	
		a O c, ÑO, N-ω, ÑO, N+1	0,101000...1000...1
...			
Clone b			

b	0,01	b, ÑO, N	0,01000...1
b O d	0,0101	b O d, ÑO, N	0,0101000...1
...	...	...	...
		b O d, ÑO, N-ω, ÑO, N+1	0,0101000...1000...1

Bibliographie

1. BAIRE R. Sur les fonctions de variables réelles, Gauthier-Villars (1899).
2. BOREL E. Leçons sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars (1899).
3. BOURBAKI N. Théorie des ensembles, Hermann (1977).
4. CANTOR G. Uber unendliche lineare Punkmannigfaltigkeiten, Math.-Ann. (1883).
5. COHEN P. Set theory and continuum hypothesis, Benjamin, New York (1966).
6. COLLOT F. - Une relation de bon ordre possible sur l'ensembe des parties des entiers naturels. (Revue de 1981).
7. - Complément à la construction d'un bon ordre possible sur des ensembles non dénombrables (*ibid*. N° 83 - 198
8. -Essai d'introduction de la théorie du bon ordre de Cantor-Zermelo en théorie générale des systèmes (Cong Systémique - AFCET sept. 1984, Paris).
9. -L'axiome de « Zénon » et l'Hypothèse du continu (Revue de Biomathématique N° 96 - 1986).
10. CONWAY J.H. Numbers and games, Acad. Press (1976).
11. COUTURAT L. L'infini mathématique, Félix Alcan (1896).
12. DENJOY A. L'énumération transfinie, livres I-IV, C. R., Paris (1946).
13. FRAENKEL A. Abstract set theory, North Holland (1966).
14. FRAISSE R. Cours de Logique Mathématique, Gauthier-Villars (1975).
15. KURATOVSKI K. Set theory, North Holland (1976).
16. GÖDEL K. The Consistency proof for the generalised continuum Hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci.
17. HILBERT D. Mathematische Probleme, Nachr. Göttingen (1900).
18. LADRIERE J. Limitation internes des formalismes, Gauthier-Villars (1957).
19. LEVY A. Basic Set Theory, Springer Verlag (1979).
20. LEVY J.C. Représentation triangulaire du « bon ordre » de F. Collot (Revue de Biomathématique N
21. NELSON E. Internal Set Theory, Bull. Am. Math. Soc. (1977)
22. POINCARE H. Science et méthode, E. Flammarion (1930).
23. REEB G. Analyse non standard, Hermann (1989).
24. ROBINSON A. Non Standard Analysis, North Holland (1966).
25. SIERPINSKI W. L'Hypothèse généralisée du Continu et l'Axiome du Choix, Fund. Math. (1947).
26. TARSKI A. Théorèmes équivalents à l'axiome du choix, Fund. Math. (1924).
27. WOODIN H. The Continuum problem revisited, Mathematical Intelligencer vol 16 n°3 p. 31-35, (1994).
28. ZERMELO E. Uber Grenzzahlen und Mengenbereiche, Fund. Math. (1930).

ANNEXE : Relation de bon ordre sur P(N)

1.1.) Relation de bon ordre sur les sous-ensembles n-lacunaires

Soit à comparer deux éléments n-lacunaires A et B tels que A soit n-lacunaire et B n'-lacunaire :

1) si n = n'

- - où les lacunes sont des entiers manquants de même rang, (A et B appartiennent à la même suite) alors A « B si Lexicographique L (avec « pour "est le prédécesseur de").

- - ou bien il s'agit d'entiers de rangs différents, alors A < B si et seulement si A < B selon l'ordre Lexicographiqu

2) si n ≠ n'

  - alors A « B si et seulement si n « n' (avec « pour "est inférieur à").

1.2.) Relation de bon ordre sur le sous-ensemble ω-lacunaire G (appartenant au clone "a" et avec un N donné).

La relation se simplifie du fait qu'il s'agit d'un même sous-ensemble dont les éléments contiennent un même nombre ensembles ω-lacunaires distincts de G (i-e deux parties de N appartenant à G).

- **-** Si A et B ont les mêmes entiers manquants (ils appartiennent à une même suite),

  alors A « B ssi A « B selon l'ordre L (avec « pour : "est le prédécesseur de").
- **-** Sinon, alors A « B si et seulement si A « B selon L-1.