Intégration de Parité, Milieux Excitables et Neuro-calcul

par Michael Zaus

Université d'Oldenburg
Institut des Sciences Cognitives (Inst. für Kognitionsforschung)
D-26111 Oldenburg

Résumé

Cet article présente une introduction en douceur de l'intégration de parité et de son impact sur des modèles de traitement de l'information dans les milieux excitables. Au lieu d'en réduire le contenu dans ce résumé, nous préférons attirer l'attention du lecteur sur la subtilité de la parité - le concept permettant de distinguer le pair de l'impair - au moyen de l'anecdote suivante**:

“Il y avait une fois une petite fille qui s'appelait Emma. Emma n'avait jamais mangé de bananes et n'avait jamais pris le train. Un jour, elle dut voyager en train depuis New York jusqu'à Pittsburgh. Pour apaiser l'angoisse d'Emma, sa mère lui donna un grand sac de bananes. Lorqu'Emma croqua son premier morceau de banane, le train s'engouffra dans un tunnel. Au second morceau, le train ressortit du tunnel au grand jour. Au troisième morceau, Pfuit ! le train entra encore dans un tunnel; au quatrième, Ouf ! il retrouva la lumière à nouveau. Et il en fut ainsi sur tout le parcours jusqu'à Pittsburgh. Emma, petite fille à l'esprit vif, raconta à son grand-père qui l'attendait à la gare : <<Chaque morceau impair de banane vous rend aveugle; chaque morceau pair remet les choses en ordre.>>”

Très bien; alors, les parités n'expliquent pas le monde..., l'analogie psycho-physique de la petite Emma mise à part. Raisonner avec des parités est quelque chose d'assez délicat, et le lecteur va devoir prendre le **bit** au sérieux dans ce qui suit. Cela exige de penser un peu plus aux **bits** comme des unités de calcul, et comme des entités qui représentent les états les plus élémentaires d'un milieu excitable. Comment ces états élémentaires interagissent au niveau quantique de l'information constitue le thème central de cet article.

1 Introduction

Le but de cet article est d'introduire le concept de l'intégration de parité et sa signification pour modéliser des milieux excitables ainsi que le traitement de l'information neuronale. L'approche méthodologique est basée sur la compression algorithmique et la logique de la parité[1], mais au lieu d'élaborer un formalisme ennuyeux, nous allons traiter le sujet en terme de machines à rétro-action pour des processus itératifs dans lesquels l'entrée se compose de séquences binaires représentant des vecteurs d'état, et la sortie représente des intégrales vectorielles de parité qui, à leur tour, sont utilisées pour l'intégration suivante. La dimension ou longueur de la séquence d'entrée détermine le nombre d'itérations, par lesquelles le processus cyclique fait évoluer un enregistrement temporel du vecteur d'état, et, simultanément, un nombre considérable de propriétés spécifiques, pour analyser des ondes périodiques et localisées d'information propagée. De cette manière, l'intégration de parité deviendra familière au lecteur, ainsi que ce qu'elle signifie et ce pourquoi elle peut acquérir une certaine importance en neuroscience cognitive et en d'autres disciplines sur le plan du calcul.

La Section 2 prépare le lecteur au thème des machines à rétro-action et sur leur extension en *machines à rétro-action de parité*. Le concept d'intégration de parité est défini à proprement parler au début de la Section 3, tandis que le reste de cette Section est consacré à un traitement détaillé des machines à rétro-action de parité. On montre que leurs algorithmes sous-jacents produisent essentiellement trois modèles génériques, appelés le *géniton*, le *pariton* et le *fanion*, qui ont la faculté de simuler l'évolution de la formation de structures dans des milieux excitables dans une grande variété de domaines (Langlet 1991, 1994a, 1994b, Zaus 1994a,b, 1995a). La Section 4 démontre que l'intégration de parité peut servir à modéliser des processus catalytiques, car les règles de la catalyse concernant les états actif et passif des catalyseurs correspondent précisément aux règles des processus d'intégration de parité. Finalement, dans la Section 5, un second domaine d'application apparaît, avec des réseaux triangulaires de couplage avec les plus proches voisins, des pavages hexagonaux, et des transformations trigonales au lieu des transformations orthogonales pour l'information comprimée du signal. D'autres domaines d'application, en particulier la recherche de contours hamiltoniens[NdlR] par intégration de parité, ainsi que des algorithmes auto-génétiques, sont prévus dans un article en préparation sur les *optimiseurs à évolution génétique* ("*evolutionary genetic optimizers*") (Zaus 1995b).

2 Les Machines à Rétro-action

Commençons par quelques notions indispensables pour comprendre les machines à rétro-action. La Figure 2.1 représente une machine à rétro-action standard à un seul pas, telle qu'elle est utilisée dans des processus itératifs pour engendrer des fractals[2]. L'unité de traitement contient une formule d'itération $x_{n+1} \leftarrow f(x_n)$, dans laquelle le symbole $\leftarrow$ désigne l'affectation, tandis que $f(x)$ se rapporte à la valeur d'une fonction linéaire ou non linéaire. La machine a besoin en entrée d'un scalaire x_n et fournit comme résultat un nouveau scalaire x_{n+1}, c'est-à-dire le résultat de la fonction f en question. En général, la formule à l'intérieur de l'unité de traitement peut être contrôlée par des paramètres supplémentaires fixes, mais, dans tous les cas, la sortie ne dépend que de l'entrée. Pour garder trace de l'évolution du temps, les résultats respectifs sont indicés. Comme il est bien connu à partir de la littérature sur le chaos et les fractals, cette machine à rétro-action possède un éventail étonnamment grand d'applications, car elle est en même temps la brique de base pour construire des machines plus sophistiquées. Remarquer la ligne de rétroaction vers la gauche sur la Figure 2.1. Elle indique que, pour toute itération, la sortie x_{n+1} sera l'entrée x_n de l'itération suivante, jusqu'à ce que le processus se termine à l'aide d'un critère soumis à une unité de contrôle.

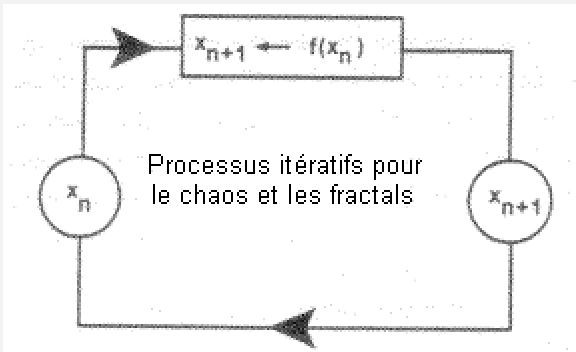

Fig. 2.1 Machine à Rétro-action à un seul pas

Considérons maintenant la figure 2.2.

Si nous remplaçons la formule $x_{n+1} \leftarrow f(x_n)$ dans l'unité de traitement par l'expression Booléenne $B_{n+1}\backslash\neq\leftarrow(B_n)$, nous obtenons ce qui va s'appeler une *Machine à Rétroaction de Parité*. Ici, à la place d'un scalaire, B_n correspond à un vecteur binaire de longueur ou dimension finie. L'exécution de cette formule $B_{n+1}\backslash\neq\leftarrow(B_n)$ engendre l'intégrale de parité B_{n+1} du vecteur binaire B_n. L'opérateur $\backslash\neq$ n'est rien d'autre que la généralisation du cumul de XOR, c'est-à-dire l'intégration par addition modulo 2 en algèbre binaire, comme indiqué dans la boîte centrale de la Figure 2.2. Alors, quel est le message de la Figure 2.2 ?

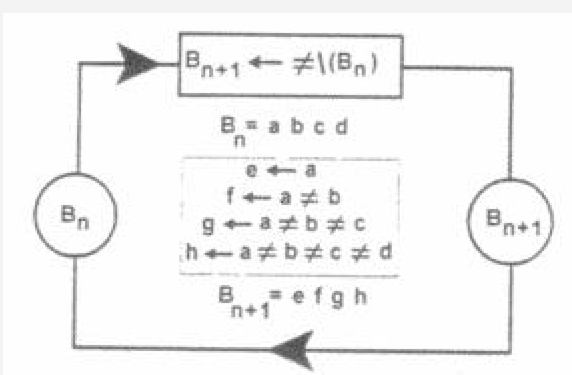

Fig. 2.2 Machine à Rétro-action de Parité

Allons plus loin. Dans le langage courant, nous utilisons le mot parité pour distinguer le pair de l'impair. Les choses sont **soit** *paires* **soit** *impaires*. Cette relation du Ou exclusif est capturée par le symbole ≠ qui, à son tour représente la fonction XOR. Deux entités impaires ont pour parité 1, tandis que deux entités paires ont pour parité 0. Si ces entités peuvent seulement se trouver dans deux états mutuellement exclusifs comme "mâle ou femelle", "spin up ou spin down", "actif ou passif", "dominant ou récessif", "excité ou inhibé", "en marche ou à l'arrêt", ce que nous considérons correspond essentiellement à des phénomènes contravalents.

Supposons maintenant qu'un milieu excitable se compose de seulement quatre cellules adjacentes telles que «ŒŒŒŒ», et que nous représentions un *état dominant* par 1 ainsi qu'un *état récessif* par 0. Alors la séquence 1 0 0 0 représente une configuration de milieu excité avec un état de tête *dominant*, et trois autres états *récessifs*. En supposant que la dominance se propage dans un milieu excitable, à quelle sorte de configuration devrions-nous nous attendre à l'étape de temps discret suivante ? Eh bien, naturellement, à la configuration 1 1 1 1 car chaque état récessif se trouve inversé par l'état dominant, dans une propagation comme une onde, modélisée par [≠\(1 0 0 0)] (1 1 1 1) Ceci revient à dire que seules les différences symétriques entre états élémentaires d'un milieu excitable sont propagées d'une manière asymétrique, et c'est précisément l'effet de l'opérateur ≠\ sur son argument 1 0 0 0. La transition de la configuration 1 0 0 0 vers la configuration 1 1 1 1 correspond juste à une itération dans la machine à rétro-action de parité. Ainsi, c'est un état intermédiaire, une onde localisée - un soliton en termes de physique - et un changement dynamique d'état dans le milieu excitable, en termes de biologie.

Pour donner un autre exemple, supposons maintenant qu'un milieu excitable soit modélisé par un tableau de récepteurs adjacents avec une topologie unique, et que ces récepteurs soient excitables dans des états "En marche" ("On") ou "A l'arrêt" ("Off"). Alors, par le même quantum d'action, "l'influx nerveux" consiste en une propagation asymétrique de différences symétriques entre des états "On" et des états "Off", ce par quoi on s'attend à la formation d'une structure émergeant dans le milieu excitable, due à la propagation d'onde sous-jacente. Selon la structure du signal excitateur, cette propagation d'onde induit un motif auto-organisé capable de diagnostic, comme on le montrera dans la Section 5. En général, cette approche peut être étendue à de "longues" séquences d'états élémentaires, ainsi, en outre, qu'à de "grands" tableaux d'états élémentaires dans les milieux excitables, et finalement à des hyper-tableaux dont les éléments sont empilés les uns sur les autres d'une manière hiérarchique, c'est-à-dire en de nombreuses structures discotiques, en couches.

L'idée fondamentale d'utiliser l'opérateur ≠\ pour modéliser le flux d'information dans les milieux excitables doit être devenue maintenant plus claire. Dans de tels modèles, cet opérateur simule[NdT] le mécanisme d'excitation, d'infection ou d'influence en engendrant des fronts d'onde qui organisent leur systèmes porteurs sous-jacents par auto-organisation en des motifs imbriqués, supports d'information. Le choix des machines à rétro-action de parité sert aussi à unifier la vaste classe de modèles introduits par Langlet (1991, 1992, 1994). Nous nous référerons explicitement aux contributions de Langlet dans les Sections suivantes, pour fournir au lecteur de l'information fondamentale.

Dans ce qui suit, nous recommandons au lecteur d'acquérir une familiarité suffisante avec l'opérateur ≠\ soit en utilisant simplement un papier et un crayon, soit en expérimentant et en explorant de manière interactive, à l'aide d'un ordinateur. Du fait que la plupart des langages de programmation ne proposent pas directement des opérateurs d'extension généralisée ou de balayage, nous ouvrirons la section 3 en définissant ≠\ de deux manières correspondant, respectivement, à l'algèbre de Boole et à l'algèbre modulo 2.

3 Les Machines à Rétro-action de Parité

Savoir que l'opérateur ≠\ propage des différences symétriques d'une manière asymétrique est essentiel pour comprendre son effet général. Nous en présentons maintenant la définition mathématique. Les entités sur lesquelles agissent les opérateurs sont appelées formellement des opérandes. Un opérateur prend une fonction et la convertit en quelque chose de différent, appelé une *fonction dérivée*[NdT]. L'expression ≠\ est ainsi une fonction dérivée où ≠ est la fonction diadique Ou exclusif, tandis que la rétrobarre \ symbolise un opérateur d'expansion monadique. Son opérande, la fonction XOR notée ≠ est alors appliquée à des k-tuples qui s'accroissent, dans les composantes de B avec k Î {2, 3, ... , l} . Ainsi, si B est le vecteur binaire de dimension l $(b_1, b_2, \ldots, b_l)$, alors, $\neq\backslash B$ est définissable par:

$$R \leftarrow [\neq\backslash B] \; R \in [b_1, (b_1 \neq b_2), (b_1 \neq b_2 \neq b_3), \ldots (b_1 \neq b_2 \neq \ldots \neq b_l)], \qquad (1)$$

où R est le *résultat* de l'opérateur, l'intégrale vectorielle de parité de B.[3] Ceci ne suffit pas toutefois à achever la définition de ≠\ . Dans ce but, nous avons besoin de l'opérateur dual =\ appelé "balayage par l'égalité". Il fonctionne exactement comme celui de la définition (1) sauf qu'il applique des égalités au lieu de différences. Comme les duaux sont au cœur des lois de *de Morgan*, nous pouvons définir $\neq\backslash B$ selon:

$$\neq\backslash B \in \overline{=\backslash \overline{B}}, \qquad (2)$$

où les barres horizontales supérieures (variables ou expressions surlignées) symbolisent le complément booléen. Par exemple,

supposons que B soit le vecteur 1 1 0 1. Alors $\overline{B}$ est le vecteur 0 0 1 0.

Ensuite, l'évaluation de $=\backslash\overline{B}$ met en jeu la séquence:

0,(0=0),(0=0=1),(0=0=1=0), ce qui produit le vecteur 0 1 1 0, et finalement,

$=\backslash\overline{B}$ produit l'intégrale de parité 1 0 0 1 c'est-à-dire $\neq\backslash B$. Une autre manière de définir $\neq\backslash B$ consiste à prendre le *résidu à 0* de *B modulo 2* par sommation partielle de *B*, cette dernière étant symbolisée par $+\backslash B$. De cette manière, l'opérateur est défini par:

$$\neq\backslash B \in 2|_0+\backslash B, \tag{3}$$

qui est l'*équivalent cumulé* de l'addition mod. 2 en algèbre binaire. En bref, si *B* est, comme auparavant, par exemple 1 1 0 1, alors sa somme cumulée est [$+\backslash B$] soit 1 2 2 3, tandis que la somme cumulée modulo 2 est 1 0 0 1, c'est-à-dire l'intégrale de parité $\neq\backslash B$, respectivement. Ceci termine nos définitions en ce qui concerne l'opérateur $\neq\backslash$. Remarquez que nous n'avons pas besoin de la définition (3) pour les Machines à Rétro-action de Parité, parce que la définition (2) contient la *compression algorithmique* de la définition (3). Ceci signifie que $\neq\backslash$ est un opérateur non-gödélien : il ne met en jeu ni pilonnage numérique[NdT] ni sommations partielles ni indécidabilité ni irréversibilité ni perte d'information. C'est un opérateur logique réversible, car il n'est basé que sur les fonctions logiquement réversibles *non* et *égale*.

Une fois de plus, il résulte de la définition (1) que le vecteur *R*, produit par l'expression $R\neq\leftarrow\backslash B$ est fabriqué par des parités accumulées, ce qui forme ainsi l'**intégrale de parité** de *B*.

C'est précisément la raison pour laquelle cet opérateur est appelé **intégration de parité**, et, ainsi, constitue en soi un **algorithme pour la modélisation des milieux excitables avec des machines à rétro-action de parité**, où *B*, l'entrée initiale, représente un vecteur d'état particulier B=« b_1 b_2 b_3 . . . b_l » d'un milieu excitable E = « $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ . . . $\square_l$ » considéré, où $\square_i$ représente une cellule excitable en états "*On*" et "*Off*", par exemple.

Il existe un aspect plus formel que l'on devrait expliciter avant de continuer, à savoir trois propriétés importantes de la fonction Ou exclusif $\neq$, et une de l'opérateur $\neq\backslash$ Ces propriétés sont définies pour tout b_i, b_j, b_k, b_l, $\square$B avec i ñ j ñ k ñ l comme suit :

$$(b_i\neq b_j) \not\neq (b_j\neq b_i) \tag{4}$$

$$(b_i\neq(b_j\neq b_k)) \not\neq ((b_i\neq b_j)\neq b_k) \tag{5}$$

L'expression (4) définit la commutativité ou propriété de symétrie de ≠, tandis que l'expression (5) définit sa propriété d'associativité. Ensemble, ces propriétés impliquent :

$$[(b_i \neq b_j) \neq (b_k \neq b_l)) \not- ((b_i \neq b_k) \neq (b_j \neq b_l)] \qquad (6)$$

c'est-à-dire la propriété de bisymétrie de ≠. Ceci signifie que la fontion Ou exclusif ≠ **préserve l'entropie**. Cette importante propriété est elle-même préservée dans l'opérateur ≠\ qui, néanmoins, est **asymétrique**, fait qui résulte immédiatement de l'inégalité:

$$[\neq\backslash 1\ 0] \mathrel{\backslash\!\!\!-} [\neq\backslash 0\ 1], \qquad (7)$$

parce que le résultat de l'expression de gauche dans (7) est (1 1), tandis que celui de l'expression de droite est à nouveau (0 1). Par exemple, si l'expression (7) est traduite en *états mendéliens* tels que la *dominance* soit représentée par "1", et l'état de *récessivité* par "0", alors le vecteur d'état (1 0) sera changé en (1 1) (*la dominance est propagée*), tandis que le vecteur d'état (0 1) demeurera inchangé. L'inégalité (7) prouve que l'opérateur ≠\ propage asymétriquement des différences symétriques, ce qui, à son tour, est une condition nécessaire pour modéliser des *fronts d'ondes qui se propagent*, avec formation de structures émergentes. Nous sommes maintenant prêts pour des *Machines à Rétro-action de Parité* pour lesquelles nous utiliserons l'abréviation **MRP**[NdT].

Puisque leur principe de base est déjà connu depuis la Section 2, nous illustrerons une MRP tout au long de cet article dans le même style que sur la Figure 2.2. Dans le reste de cette Section, nous montrons qu'une MRP est en réalité un automate cellulaire au sens de Wolfram (1994), et que des modifications mineures de son entrée ou de son algorithme sous-jacent conduisent à un nombre de noyaux de traitement d'information uniques quoique fortement reliés entre eux, noyaux dont les propriétés vont contribuer à l'analyse de la propagation du signal dans les milieux excitables (Langlet 1991, 1993, 1994 ; Zaus 1994a,b, 1995). Pour fournir suffisamment de bases pour les Sections 4 et 5, nous restreindrons d'abord notre attention aux types les plus importants de vecteurs d'entrée, puis nous décrirons les sorties correspondantes de la MRP. Ceci inclut essentiellement trois modèles caractéristiques : Le *Géniton* pour expliquer les aspects fondamentaux des MRP, puis sa généralisation au *Pariton* comme modèle principal de la Section 4, et finalement le *Fanion*, une structure calculatoire qui apparaît à l'intérieur du *Pariton*, avec des conséquences significatives pour la modélisation du traitement rétinien de l'information, comme on le verra dans la Section 5. Maintenant, pour l'entrée d'une MRP, nous devons spécifier au moins trois types de vecteurs binaires.

Le *premier* type le plus primitif s'appelle une *séquence primordiale*. Il s'agit d'un vecteur binaire de longueur *l* avec un bit de tête valant 1 et l-1 bits suivants valant 0. Pour les séquences primordiales, nous utilisons la notation $l\uparrow 1$. Par exemple, le vecteur $2\uparrow 1$ 1 0 s'appelle la séquence élémentaire, alors que le vecteur $4\uparrow 1$ 1 0 0 0 se rapporte à une séquence primordiale d'ordre 4. Dans ce qui suit, la longueur d'un vecteur binaire sera toujours une puissance de 2; on ne considèrera donc que des séquences de longueur 2, 4, 8, 16, 32, ... : cette restriction force une MRP à n'engendrer que des tableaux binaires carrés c'est-à-dire des matrices de parité $l \times l$. Une modification mineure de l'algorithme permet, en outre, d'engendrer des matrices de parité triangulaires.

Le *second* type de vecteurs d'entrée concerne des *séquences binaires* de longueur l qui codent des mots, des signaux ou des images. Ces vecteurs sont utilisés pour engendrer des topologies discrètes d'évolution temporelle d'un signal, ou pour engendrer des noyaux spéciaux traitant l'information, avec un grand nombre de capacités de diagnostic pour l'analyse du signal et les transformations du signal comprimé.

Le *troisième* type de vecteurs d'entrée concerne des vecteurs binaires pseudo-aléatoires de longueur l. Leur intégration de parité itérée révèle des structures apériodiques et apparemment chaotiques, toutefois avec des états futurs prévisibles, et des résultats intéressants du point de vue des systèmes fractals et chaotiques.

Un aspect très important à propos de ces vecteurs d'entrée est que leur intégration de parité itérée reproduit un front d'onde se déplaçant de gauche à droite ou de haut en bas, ou des bords vers le centre, par rapport à un certain milieu excitable. Il est alors instructif de penser en termes de structures cellulaires - comme celles ci-après - dont les éléments s'excitent (ou s'infectent) par déplacement du front d'onde, ce qui crée une topologie discrète d'éléments excités qui dépend de la structure du vecteur d'entrée.

□ □ □ □	□ □ □ □	□ □
□ □ □ □	□ □ □	□ □ □
□ □ □ □	□ □	□ □
□ □ □ □	□	
Topologie Rectangulaire	Topologie Trigonale	Topologie Hexagonale

Ainsi, le front d'onde propagé se meut au dessus d'un quelconque milieu spécifique excitable dont l'existence est posée comme réelle en principe, mais qui ne sera pas montré explicitement, car le processus itératif transforme implicitement la structure émergente du milieu. Il "remplit" de structure les topologies "vides" ci-dessus, d'une manière analogue à celle dont un champ de récepteurs s'organise en structure excitée, par propagation d'une onde lumineuse.

Au vu des types ci-dessus de vecteurs d'entrée et de leurs caractéristiques, nous obtenons corrélativement différentes sorties de la MRP; alors, commençons par la *séquence* *élémentaire* « 1 0 ». Selon la Figure 3.1, la MRP correspondante engendre dans ce cas une matrice de parité 2×2 (Fig. 3.1.1) qui a été baptisée le *pariton génétique*, ou *géniton* en abrégé (Langlet 1991, 1994). Son nom est basé sur la nature générique de cette matrice de parité, car elle peut servir de brique de base pour des modèles en mathématiques, physique, chimie, génétique, neurobiologie, psychologie et informatique (Langlet 1992, 1994, Zaus 1994a,b)

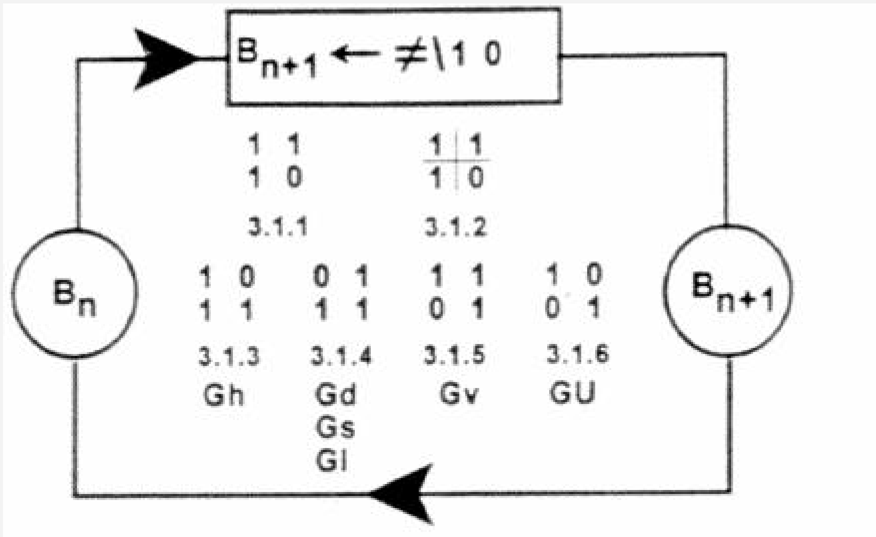

Figure 3.1   Le Géniton

Les caractéristiques du géniton s'expliquent en décortiquant la Figure 3.1 en sous-figures, de la Fig. 3.1.1 à la Fig. 3.1.6 comme suit:

1. Il est évident, à partir de la Fig. 3.1.1 que le géniton est une matrice symétrique, c'est-à-dire **G** = **G**$^{\mathbf{T}}$, si **T** symbolise la transposition. **G** est aussi une matrice de Hadamard renormalisée, car le remplacement de 0 par -1 produit la plus petite matrice de Hadamard normalisée. G est en outre la plus petite matrice contenant le triangle de Pascal modulo 2[NdT] donc une matrice de Sierpi?ski **S**. Enfin, **G** est la représentation exacte de **j** la racine cubique complexe de 1, en algèbre modulo 2.

2. Si on superpose au géniton un réticule comme indiqué dans la Fig. 3.1.2, on se rend compte que cette matrice a une périodicité de 1 dans sa première colonne (ou ligne) et une périodicité de 2 dans sa seconde colonne (ou ligne). Ainsi, il s'agit du plus petit système périodique concevable. Il permet une croissance périodique par récursion, c'est-à-dire qu'en remplaçant chaque élément égal à 1 de la matrice par la matrice elle-même et chaque élément nul par une matrice nulle de même taille, il en résulte un géniton à l'échelle supérieure, une matrice de dimension 4×4. Cette propriété de croissance auto-similaire est vraie à toute échelle, pour une récursion n-uple.

3. En outre, aussi bien en ligne qu'en colonne, le géniton est totalement corrélé dans sa première colonne (ou ligne) c'est-

à-dire auto-similaire, et non corrélé dans sa seconde colonne (ou ligne), c'est-à-dire orthogonal, avec le maximum de dissemblance, et oscillatoire.

4. Une structure partiellement pleinement corrélée et partiellement non corrélée est – en moyenne – semi corrélée, c'est-à-dire reflète le bruit en 1/*f* (bruit rose). La semi-corrélation implique la fractalité et le chaos; ainsi, le géniton est à la fois un fractal à petite échelle et un système chaotique. Ceci découle immédiatement de sa propriété sierpi◌̈skienne.

5. Si on se réfère aux sous-figures de 3.1.3 à 3.1.5, le géniton a trois images symétriques. L'image dans un miroir horizontal, **Gh**, s'obtient aussi par une rotation de 90∘ dans le plan. Ensuite, l'image dans un miroir diagonal **Gd** s'obtient soit par une rotation de 180∘ dans le plan, soit en prenant le produit matriciel booléen **G≠.^G** soit en prenant l'inverse matriciel booléen de **G**. Enfin, l'image dans un miroir vertical **Gv**, peut aussi s'obtenir par une rotation de 270∘ dans le plan. Ainsi, l'image de **G** dans un miroir diagonal est équivalente au carré matriciel **Gs** de **G** et à l'inverse matriciel **GI** de **G**. Les matrices **G** et **Gd** sont des opérateurs de rotation ternaires, tandis que **Gh** et **Gv** sont des opérateurs de symétrie d'ordre 2. Les premières constituent une condition nécessaire pour la modélisation de phénomènes de croissance dans l'espace tridimensionnel, alors que les dernières sont des matrices de transformation, car toutes deux sont des opérateurs involutifs. Cette évidence est expliquée ci-après.

6. Enfin, si on se rapporte à 3.1.6. dans la Figure 3.1., la matrice unité **GU** est obtenue soit par le produit matriciel booléen (**Gs≠.^G**)[4] soit par l'élévation matricielle booléenne à la puissance trois de **G** selon (**G≠.^G≠.^G**) = **GU** . Ainsi, à toute échelle, les génitons et leurs équivalents d'ordre supérieur sont des matrices auto-similaires dont le carré est l'image dans un miroir diagonal[NdT] tandis que leur cube est une matrice-unité. En d'autres termes, l'auto-organisation spontanée à symétrie cubique permet la modélisation de phénomènes de croissance sur trois axes métriques équivalents, et la croissance périodique dans le temps et l'espace.

Bien que les théories et les modèles concernant les fractals et le chaos, ainsi que celles et ceux qui se rapportent à la computation génétique et cellulaire accordent beaucoup d'importance aux blocs élémentaires de base, celui-ci – le géniton – a été négligé. Nous avons vu que cette petite matrice de parité 2x2 contient une fantastique quantité d'information, même bien plus que ce que nous avons pu mentionner dans les limites de cet article. L'aspect le plus remarquable, toutefois, est que le géniton, avec ses retournements multiples de 90∘, constitue, avec la matrice-unité **GU** et le complément booléen de celle-ci **GU'**, un groupe à six membres « **G, Gh, Gd, Gv, GU, GU'** » de matrices inversibles en algèbre binaire, le résultat d'un produit quelconque de ces matrices étant un membre du groupe. Ceci signifie que le géniton **G** ainsi que ses rotations sont des opérateurs matriciels spéciaux en algèbre binaire, et, en particulier, que les opérateurs matriciels **Gh** et **Gv** sont les équivalents algébriques binaires des opérateurs matriciels utilisés pour les transformations de Fourier, Walsh-Hadamard, et pour la transformation par ondelettes. Nous allons en discuter plus loin, après la présentation du *pariton*, que nous allons faire maintenant.

Augmenter la taille du géniton peut se faire au moins de trois façons. L'une d'entre elles consiste à remplacer chaque élément (non nul) du géniton par lui-même récursivement. La seconde façon consisterait à prendre le produit de Kronecker habituel **G** Ä **G**. La troisième consiste à prendre une séquence primordiale B_n de longueur *l* comme argument de la MRP. Dans tous les cas, le résultat sera une matrice de parité $l \ominus l$, appelée un *pariton* **P**, dans lequel chaque ligne est l'intégrale de parité de la ligne précédente. Par exemple, si la séquence primordiale 4↑1 1 0 0 0 est l'argument, la MRP fabrique successivement quatre intégrales de parité successives. D'abord, [≠\1 0 0 0]1 1 1 1, puis [≠\1 1 1 1]1 0 1 0, puis [≠\1 0 1 0] 1 1 0 0, et finalement [≠\1 1 0 0]1 0 0 0. Le nombre d'itérations est équivalent à la longueur du vecteur d'entrée, et ce dernier réapparaît comme la dernière intégrale de parité dans le pariton. Il existe un point délicat sur lequel il convient d'insister : Chaque ligne du pariton est à la fois le passé et le futur d'une autre ligne quelconque du pariton. Par exemple, la première ligne est le futur du vecteur d'entrée et le passé de la seconde ligne. Le processus itératif complet est semblable à une métamorphose, un changement de forme, de structure, de substance. Cette évolution successive est intimement connectée à une série chronologique reflétant des explosions spontanées, comme dans le cas des potentiels d'action, ou des réductions d'activité spontanées, comme dans le cas des interactions catalytiques, comme on le montre dans la Section 4.

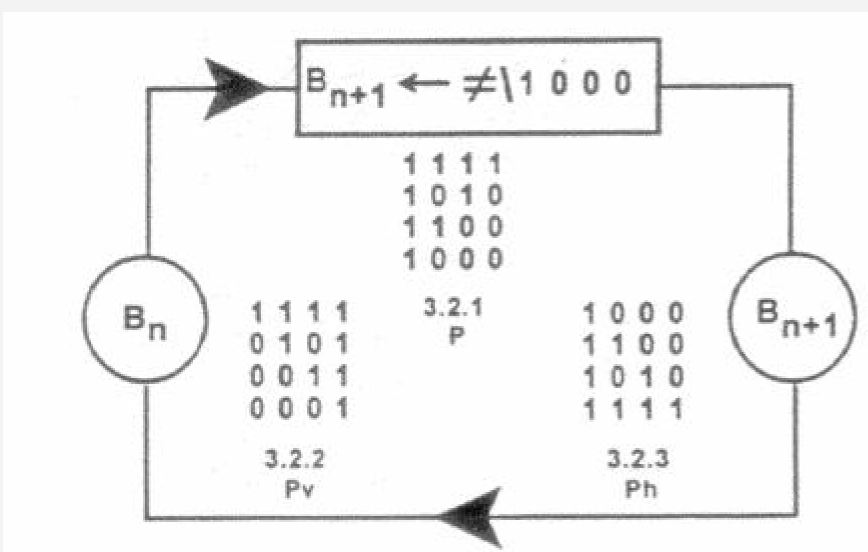

Figure 3.2 Le Pariton

Considérons maintenant la Figure 3.2.1. dans la Figure 3.2. Elle présente l'ordre dans lequel le pariton P de la séquence primordiale 1 0 0 0 est engendré, et prouve que tout ce qui a été annoncé pour le géniton est vrai pour le pariton, à toute échelle, pour toute séquence primordiale B de longueur l. En regardant la Figure 3.2.1 de plus près, le lecteur s'apercevra que le dernier bit de chaque ligne indique la parité de la ligne précédente. Ainsi, l'intégration de parité vérifie la parité de son argument automatiquement. Comme le géniton, ce pariton est manifestement une matrice S de Sierpiński, et contient le triangle de Pascal modulo 2 de bas en haut. Ainsi, par intégration de parité, la MRP engendre un automate cellulaire à une dimension, à partir de toute séquence primordiale de longueur l. Comme le géniton, ce pariton $l \times l$ est membre d'un **groupe** de six membres « **P**, **Ph**, **Pd**, **Pv**, **PU**, **PU'** » de matrices inversibles. Les opérateurs matriciels **Ph** et **Pv** des Figures 3.2.2 et 3.2.3 résultent de réflexions horizontale et verticale du géniton c'est-à-dire de **Gh** et **Gv**. La symétrie d'ordre 2 de ces opérateurs matriciels en fait des opérateurs involutifs, donc **Ph** et **Pv** doivent être aussi des matrices involutives, c'est-à-dire aussi des matrices de transformation inversibles. Tel est bien le cas, mais, pour rendre ce fait évident, il est nécessaire de généraliser le pariton à n'importe quel vecteur binaire fini, et non plus de considérer simplement des séquences primordiales.

A partir de maintenant, nous supposons que le vecteur d'entrée B de la MRP code une information spécifique, par exemple un symbole, un mot, un bio-signal ou une image, et que la longueur l de B est une puissance de 2. Alors, la MRP fabrique par intégration de parité itérative le pariton correspondant à B. Le pariton obtenu n'est plus un tamis de Sierpiński régulier, mais une matrice de parité $l \times l$ avec une topologie discrète, fractale. Il s'agit réellement d'un noyau assurant le traitement de l'information, avec plein de structure. Pour rendre ceci explicite, prenons un simple exemple en utilisant un "signal" quelconque, la séquence binaire $B \leftarrow (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)$, comme entrée pour la MRP. La longueur de ce signal étant $l=8$, la MRP engendre une matrice 8×8 avec 8 lignes et 8 colonnes. Comme il s'agit d'un système périodique, il doit exister une périodicité spécifique selon les colonnes, et il devrait se trouver une certain "série chronologique" selon les lignes. Ces deux caractéristiques sont uniques pour chaque structure d'entrée, et la topologie fractale du pariton correspondant est aussi unique qu'une empreinte digitale. Chaque vecteur d'entrée aura une périodicité, une histoire et un paysage fractal uniques, indépendamment de sa longueur l. Ces aspects sont importants pour le traitement du signal, comme nous le verrons dans la Section 5. Maintenant, le point principal du processus d'intégration sous-jacent est que ce dernier n'engendre pas seulement une structure, mais des structures dans la structure, qui s'avèrent être des transformées spéciales. Considérons maintenant la Figure 3.3 .

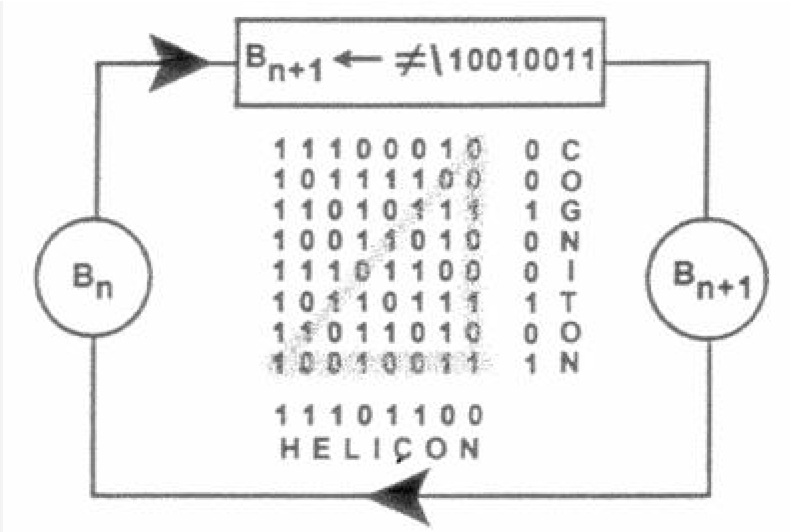

Figure 3.3 Le Pariton d'un signal

Les paritons ont naturellement beaucoup plus de structure que les génitons. Leurs propriétés s'expliquent au mieux en développant les détails de la Figure 3.3.

1. Chaque ligne de ce pariton particulier est l'intégrale de parité de la ligne précédente, tandis que le dernier bit significatif de chaque ligne est la parité de la ligne précédente. Le pariton P_B se fabrique de haut en bas.

2. La MRP engendre deux transformations du vecteur d'entrée B, en particulier le *cogniton* C, représenté par la dernière colonne de haut en bas, et l'*héliçon* H représenté par la deuxième diagonale du pariton, de bas en haut.

3. Les deux transformations ont leurs correspondances sous-jacentes, à savoir la transformation involutive $k : B \rightarrow C$, appelée la *transformation cognitive*, et la transformation associée $h : B \rightarrow H$, appelée la *transformation hélicoïdale*.

4. La propriété d'involution ci-dessus signifie que $k(B) \in C$ et que $k[k(B)] \in B$, de sorte que la transformation cognitive est sa propre inverse. En d'autres termes, le cogniton du cogniton est le signal original B. La transformation cognitive est en fait l'équivalent algébrique binaire des transformations de Fourier, Walsh-Hadamard, et de la transformation par ondelettes; c'est une transformation orthogonale du signal B.

5. Deux manières standard de calculer les transformées cognitive et hélicoïdale consistent à effectuer, respectivement, les produits internes booléens généralisés $C \in B \neq .\wedge Ph$ et $H \in B \neq .\wedge Pv$, où Ph et Pv sont les génitons conformes, les opérateurs matriciels tirés de la Figure 3.2 pour P_B.

6. Une manière plus rapide de calculer la transformée cognitive est assurée par la MRP ci-dessous, qui concatène à chaque itération le dernier bit significatif de l'intégrale de parité, la transformée cognitive étant obtenue sans aucune

matrice de transformation ("e" étant un élément vide pour initialiser les concaténations).

$$B_n \quad C_{n+1} \leftarrow e, ^{-} \; 1 \uparrow B_{n+1} \backslash \neq \; \leftarrow B_n \quad B_{n+1}$$

Cette transformation est appelée la transformation cognitive rapide FCT[NdT]; c'est un équivalent binaire encore plus élégant de la transformée de Fourier rapide ou de la transformée de Walsh-Hadamard rapide. Il existe même des versions encore plus rapides de la transformation, mais nous en discuterons ailleurs (Langlet 1994, Zaus 1995).

7. Le pariton se qualifie pour le calcul neuronal en raison des propriétés suivantes : (1) il représente un noyau auto-organisé traitant l'information; (2) il est, colonne après colonne, de gauche à droite, une structure mémorielle de plus en plus différenciée, parce que chaque colonne excepté la dernière - le cogniton - représente un anté-cogniton d'ordre *l* tel que, de gauche à droite, chaque colonne représente une transformée cognitive qui se différencie pas à pas; (3) l'information du signal est répartie dans la topologie fractale du pariton de telle sorte qu'une information partielle peut être reconstituée à partir de n'importe quel anté-cogniton; (4) le signal entier B peut être reconstitué à partir du cogniton, la mémoire principale du pariton; (5) la structure entière du pariton peut être reconstituée à partir du cogniton par la MRP suivante :

$$C_n \quad C_{n+1} \leftarrow e, \; C_n {}^{-} \neq 1 \Phi C_n \quad C_{n+1}$$

où l'algorithme se traduit aisément par «Pratiquer une permutation circulaire (Φ) du cogniton *C* d'un bit, puis appliquer XOR ($\neq$) entre ce résultat et le cogniton, sauver le résultat C_{n+1}, puis utiliser ce dernier résultat comme l'entrée C_n du cycle suivant; répéter cela *l* fois selon la longueur de *C*.” Cette reconstruction fonctionne aussi partiellement en considérant n'importe quel anté-cogniton du pariton; (6) la reconstructibilité partielle ou totale décrite ci-dessus montre que la pariton est une structure de mémoire semi-holographique, comme il en est question dans la théorie des réseaux de neurones (Pao, 1989).

8. Un aspect final à propos du pariton est qu'il se qualifie

comme modèle des engrammes dans les milieux excitables et les réseaux neuronaux. Les travaux de Semon (1909) et de Russell (1921) sont d'un intérêt très spécial sous ce rapport. Citons Russell (1921, P. 88) : ≜Quand un organisme, soit un animal soit une plante, est soumis à un stimulus, ce qui produit un certain état d'excitation, le retrait de ce stimulus lui permet de retourner à une condition d'équilibre. Mais le nouvel état d'équilibre est différent de l'ancien, comme on peut le voir dans la faculté de réaction. L'état d'équilibre avant le stimulus peut être appelé "l'état primaire d'indifférence", et celui après la cessation du stimulus "l'état secondaire d'indifférence". Nous définissons "l'effet engraphique" d'un stimulus comme l'effet de provoquer une différence entre les états d'indifférences primaire et secondaire, et cette différence elle-même est définie comme "l'engramme" dû au stimulus." En ce qui concerne cette caractérisation, le pariton est assurément un modèle de l'engramme. Cette conclusion sera traitée ailleurs.

Cela peut constituer une surprise pour le lecteur qu'autant de propriétés fondamentales puissent être extraites d'une matrice de parité apparemment "innocente" comme celle de la figure 3.3; pourtant, nous n'en sommes pas encore au bout, et ce pour la raison suivante : Si nous considérons à nouveau la figure 3.3, nous reconnaissons une zone ombrée le long de la deuxième diagonale, l'héliçon, puis le long de la dernière colonne, le cogniton, et finalement le long de la dernière ligne, le signal ou vecteur d'entrée réapparu. Cette structure triangulaire est cachée dans le pariton, mais elle constitue un modèle de calcul émergeant, appelé le *fanion* (Langlet 1993, 1994; Zaus 1995). Il jouera un rôle central dans la Section 5 au niveau du calcul neuronal et de la modélisation rétinienne. Nous nous restreignons ici aux idées de base. Considérons maintenant la MRP de la figure 3.4 :

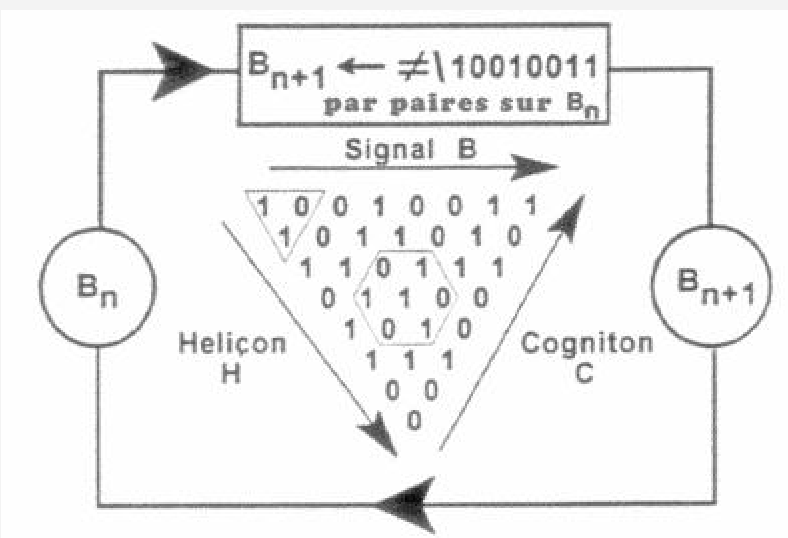

Figure 3.4 Le Fanion

En ce qui concerne l'entrée, nous utilisons le même vecteur d'entrée qu'auparavant. Cela rend plus facile la comparaison entre les deux modèles, le pariton et le fanion. La principale différence est la suivante : Au lieu de prendre l'intégrale de parité le long de chaque séquence binaire engendrée, l'opérateur ≠\ est remplacé par la prise de différences de parité par paires le long de chaque séquence binaire engendrée, mais dont la taille diminue à chaque fois[NdT]. Le signal *B* dans la Figure 3.4 se propage d'abord de droite à gauche, puis de haut en bas, et, alors, le milieu excitable évolue en une structure auto-organisée. Ici, l'héliçon *H* apparaît du côté gauche, tandis que le cogniton *C* émerge du côté droit.

Décortiquons la Figure 3.4 pour expliquer plus de détails à propos de la structure interne du fanion :

1. Remarquer que la structure trigonale (triangulaire) est décomposable en triangles plus petits et en hexagones :

□ □ □ □		
□ □ □	□ □	□ □
□ □	□	□ □ □
□		□ □

2. En regardant de plus près le triangle en haut à gauche de la figure 3.4, on reconnaît que la position inférieure contient la parité des deux positions du dessus. En "balayant" le motif triangulaire bit à bit de gauche à droite, on s'aperçoit que cela est vrai pour l'ensemble de la structure.

3. Ensuite, si nous extrayons l'hexagone au centre de la Figure 3.4, il devient alors évident que la parité de la cellule centrale (ici 1) est déterminée par les deux éléments au-dessus, par les deux éléments en bas à gauche, et aussi par les deux éléments en bas à droite de l'hexagone. De même, en balayant toutes les structures hexagonales le long des trois directions du fanion, il s'avère que cette propriété est vraie dans toute la structure, elle aussi.

0 1
1
1 0
0 1

4. En nous reportant à nouveau à la figure 3.4 et en commençant à la deuxième ligne, chaque parité de la cellule est déterminée par les deux voisins les plus proches situés au-dessus. Ceci est vrai en descendant jusqu'à la dernière cellule en bas. Maintenant, si nous tournons la structure de 120∘ dans le sens des aiguilles d'une montre, l'héliçon *H* vient se placer en position horizontale en haut. Alors, la parité de chaque cellule est encore déterminée par les deux voisins les plus proches au-dessus. Une nouvelle rotation de 120∘ amène le cogniton *C* sur le dessus, et les mêmes relations sont encore valables. Finalement, une troisième rotation reproduit la forme originale telle qu'elle est affichée sur la Figure 3.4 .

5. Ainsi, contrairement aux transformations orthogonales, le fanion implique une transformation trigonale du signal traité. La propriété-clé de la transformation trigonale est la

suivante : Avec trois rotations de 120°, le signal est transformé d'abord en héliçon *H*, puis en cogniton *C*, et finalement en lui-même, mais la structure dans son ensemble, c'est-à-dire la topologie du fanion, le motif des excitations du milieu excitable sous-jacent, demeure **invariante**. La même chose vaut pour des rotations en sens contraire, de 120°.

Le fanion est manifestement un processeur de données isentropique, résistant à l'erreur, cyclique, non gödélien et réversible, avec un nombre de caractéristiques encore inexploitées pour modéliser le traitement de l'information dans des milieux excitables. Nous reviendrons sur cette intrigante structure à la Section 5 pour discuter de son impact sur la modélisation rétinienne digitale.
Nous espérons que l'approche précédente via la machine à rétro-action de parité a constitué une toile de fond adéquate pour ces modèles comme le géniton, le pariton et le fanion. Les MRP devraient aider à unifier la modélisation scientifique à partir de zéro, car ici, aucune hypothèse *ad hoc* n'est admise[5]. En somme, il s'agit seulement du début d'un nouveau type de modèles pour le traitement de l'information. Nous avons exclu les machines à rétro-action de parité à n étapes, qui engendrent des processus de croissance, comme on en trouve en génétique, en neuro-génétique et en neuro-biologie. Il est beaucoup plus difficile de les implanter[NdT] avec succès que les MRP plus élémentaires décrites ici. Nous nous intéresserons aux "grosses" machines lorsque nous aurons acquis suffisamment d'expérience avec les "petites", et cela demandera encore beaucoup de travail, comme nous le verrons dans les sections suivantes.

Nous avons aussi exclu les fantastiques propriétés du géniton, du pariton et du fanion en physique. Sous ce rapport, le lecteur pourra se référer à Langlet (1994a,b). Finalement, un jeu de programmes pour l'assemblage des MRP est actuellement en préparation (Zaus 1995a).

4 Milieux Excitables et Paritons

Au vu des résultats techniques obtenus dans les Sections précédentes, nous abordons maintenant la question de savoir si la logique de la parité peut offrir des modèles qui expliquent les observations expérimentales, en fournissant des descriptions assez compactes de phénomènes hautement complexes. On peut répondre à cette question par l'affirmative pour la formation de structure dans les milieux excitables. Comme indiqué par Langlet (1991, 1994) et Lüneburg (1994), les milieux excitables abondent dans la nature. Ils concernent des phénomènes aussi divers que l'infection de blessures, la carcinomatose, les motifs de pigmentation des peaux de vertébrés, l'apparition des émotions, les réponses galvaniques cutanées, les enregistrements d'EEG, les tremblements de terre, les crues et les feux de forêt, les rythmes circadiens en physiologie, ainsi que de nombreux autres phénomènes réactionnels de diffusion, d'agrégation et de propagation. En général, il existe trois caractéristiques pour les milieux excitables. La première est leur faculté de recevoir et de distribuer des excitations. La seconde est qu'ils présentent un comportement en loi exponentielle f^{-b} avec b » 1 dans leur spectre de basse fréquence, d'où le bruit rose[6]. Et la troisième caractéristique est celle des fronts d'onde formés par la propagation de différences entre les états élémentaires, qui bouleverse les états dans leur stabilité minimale en créant de nouvelles structures.

Considérez maintenant la Figure 4.1. Elle montre, sur sa droite un pariton régulier engendré par la MRP la plus simple, par intégration de parité itérée à partir de la séquence primordiale 32↑1 avec un bit de tête égal à 1 et 31 bits à 0. Nous savons, depuis la Section 3, qu'il s'agit d'un géniton à échelle plus grande, c'est-à-dire une structure symétrique, périodique, auto-similaire, et, en moyenne semi-corrélée.

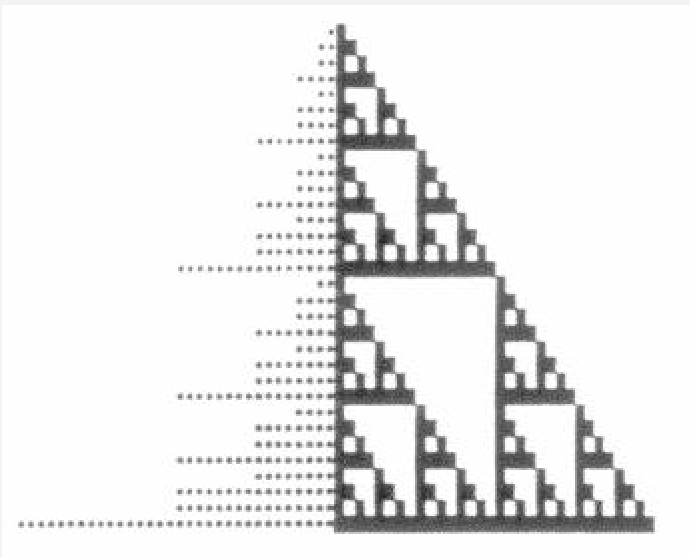

Figure 4.1   Le Pariton et sa Série Chronologique

Nous savons aussi, depuis la Section 3, qu'il équivaut à un crible de Sierpiński et à un triangle de Pascal modulo 2. Le côté gauche de la Figure 4.1. montre l'histogramme d'un enregistrement d'activité moléculaire, biophysique, chimique ou neuro-physiologique. Regardons-en les détails en prenant en considération les travaux fondamentaux de Dress et al. (1985) et Lüneburg (1994).

Dans les expériences de Dress et al. (1985) concernant les processus de conversion catalytique, un flux de monoxyde de carbone était envoyé vers le haut à travers un assemblage d'agents catalytiques. Au lieu d'un processus d'oxydation continu, par lequel les catalyseurs oxydent le monoxyde de carbone en dioxyde de carbone à taux constant, ils ont découvert des motifs complexes et curieusement spontanés de réduction d'activité, au cours de leurs mesures. Afin de donner une explication à ce processus apparemment fractal, ils décidèrent de le modéliser en première approximation par un automate cellulaire monodimensionnel, appelé la *machine de parité de Pascal*. Le résultat est reproduit sur la Figure 4.2, dans laquelle le diagramme de la partie supérieure montre le taux de réaction chimique en fonction du temps, tandis que la partie inférieure montre pour 0 £ n £ 120, le nombre C(n) de coefficients du binome (C_k^n) modulo 2 avec une parité 1, c'est-à-dire les coefficients impairs.

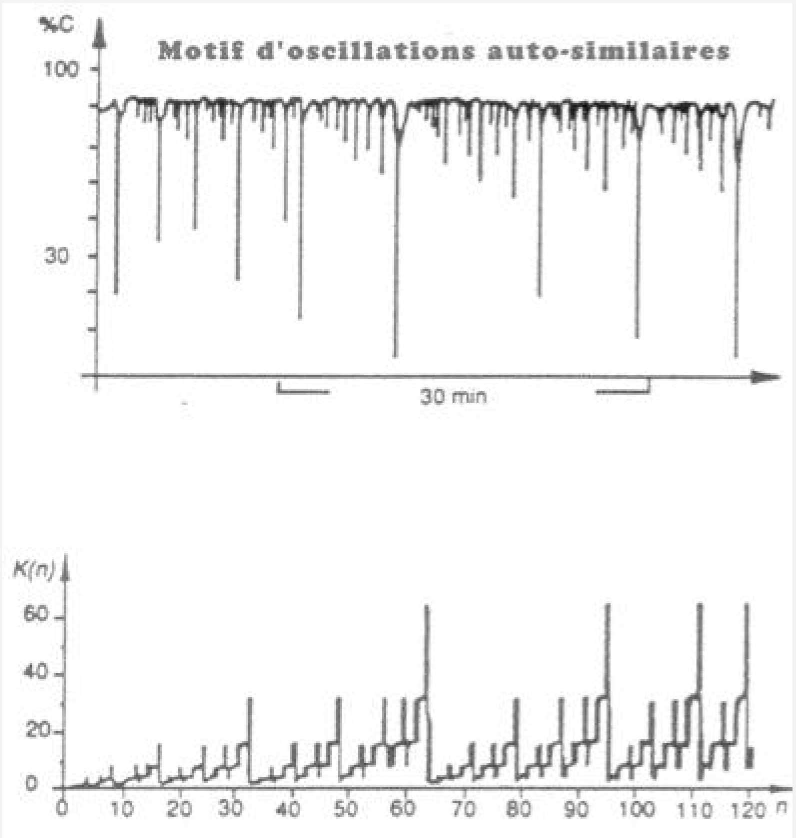

Figure 4.2   Séries Chronologiques d'Activité[7]

L'idée d'utiliser une machine à parité de Pascal pour un automate cellulaire monodimensionnel est basée sur l'hypothèse qu'un catalyseur, représenté par une case en position n, s'oxyde au temps t si précisément l'un de ses plus proches voisins dans les positions n et n−1 était oxydé au temps t−1. Ainsi, en commençant avec exactement un seul élément non nul, l'automate cellulaire évolue selon la règle que l'état d'une case au temps t+1 est définissable comme la somme de son propre état et de celui de son voisin du dessous au temps t. Maintenant, en regardant la Figure 4.1, il devient évident que ce processus est modélisé de bas en haut par l'intégration de parité à elle toute seule. L'approche numérique $f_t(n)=f_{t-1}(n)+f_{t-1}(n-1)$ *mod 2* qui engendre le triangle de Pascal modulo 2 est remplacée par un seul opérateur, à savoir ≠\B←l↑1, où l'argument est une séquence primordiale de longueur l. La série chronologique de la Fig. 4.1 est basée sur la séquence 32↑1, tandis que celle de la Figure 4.2 (diagramme du bas) est basée sur la séquence 128↑1.

Les enregistrements de l'activité dans les deux figures visualisent, dans ce contexte, la réduction d'activité spontanée. Dans la Figure 4.1, chaque *point noir* représente un état passif (1) et chaque *point blanc* un état actif (0). La somme des états passifs pour chaque ligne, de haut en bas, révèle l'histogramme, c'est-à-dire la série chronologique du processus modélisé. La ressemblance surprenante entre l'enregistrement d'activité chimique et l'histogramme de Pascal c'est-à-dire de la parité dans la Figure 4.2 fait surgir la question de savoir si cette approche de modélisation est justifiable par le critére d'absence d'empirisme. A ce propos, nous pouvons citer le point de vue de Lüneburg, à cause de sa clarté, concernant le processus sous-jacent :

“En dessous d'un certain seuil de température, chaque catalyseur isolé oscille périodiquement entre son état actif et son état passif, alors qu'au dessus de ce seuil, il présente une bi-stabilité. La bi-stabilité signifie qu'il reste actif s'il est actif, et passif s'il est passif. En outre, nous pouvons supposer que l'activité d'un catalyseur agmente la température au-dessus de lui de sorte que celui du dessus va rester ou devenir bi-stable, préservant ainsi son état d'activité ou de passivité respectivement. Au contraire, la passivité peut refroidir le catalyseur juste au-dessus - ainsi, dans ce cas, celui-ci demeure ou devient oscillant et commence immédiatement à modifier son activité. Si vous regardez ces règles de plus près, vous vous apercevez que vous pouvez oublier la bi-stabilité ainsi que les oscillations, puisque seules l'activité et la passivité ont vraiment de l'importance pour décider comment le processus va continuer à évoluer. En bref, supposez deux catalyseurs situés l'un au-dessus de l'autre. Alors, le catalyseur supérieur sera actif après le prochain pas si et seulement si lui et son voisin inférieur sont tous deux passifs ou tous deux actifs. Si vous identifiez actif à 0 et passif à 1, ceci coïncide avec l'effet de l'addition modulo 2. D'où la règle de catalyse qui correspond précisément aux règles de l'automate de parité de Pascal. Ainsi, le modèle expliquerait les observations expérimentales et fournirait une description assez simple d'un phénomène qui, autrement, apparaît hautement complexe.” (Lüneburg 1994, p. 267)

Il est important d'insister sur l'essence même de cette citation : “... **seules l'activité et la passivité ont vraiment de l'importance pour décider comment le processus va continuer à évoluer**”. Telle est exactement la philosophie fondamentale de la modélisation des milieux excitables par des paritons, car seuls les états contravalents sont décisifs pour propager des fronts d'onde dans des milieux excitables. Il devrait être évident que ceci ne peut être assuré exclusivement par le pariton régulier reproduit sur la Figure 4.1; il en est de même pour des automates de Pascal à 1 ou 2 dimensions. Mais on doit garder présent à l'esprit que les paritons sont bien plus généraux que le triangle de Pascal modulo 2. Ceci est dépeint dans la Figure 4.3 ci-après. En étudiant clairement les détails, le lecteur reconnaîtra que chaque "*parcours*" du *nord-ouest* au *sud* ou du *nord-ouest* à l'*est* puis au *sud*, ou du *nord-ouest* au *sud-est* et ensuite vers le *sud*, rassemble, en un seul coup d'œil, la nature canonique de la logique de la parité. La Figure 4.3 décrit la Section 3 relative au pariton, et souligne le fait que le pariton régulier (géniton) est l'équivalent binaire de l'invariant de la transformation de Fourier, à savoir la distribution normale standard de Gauss.

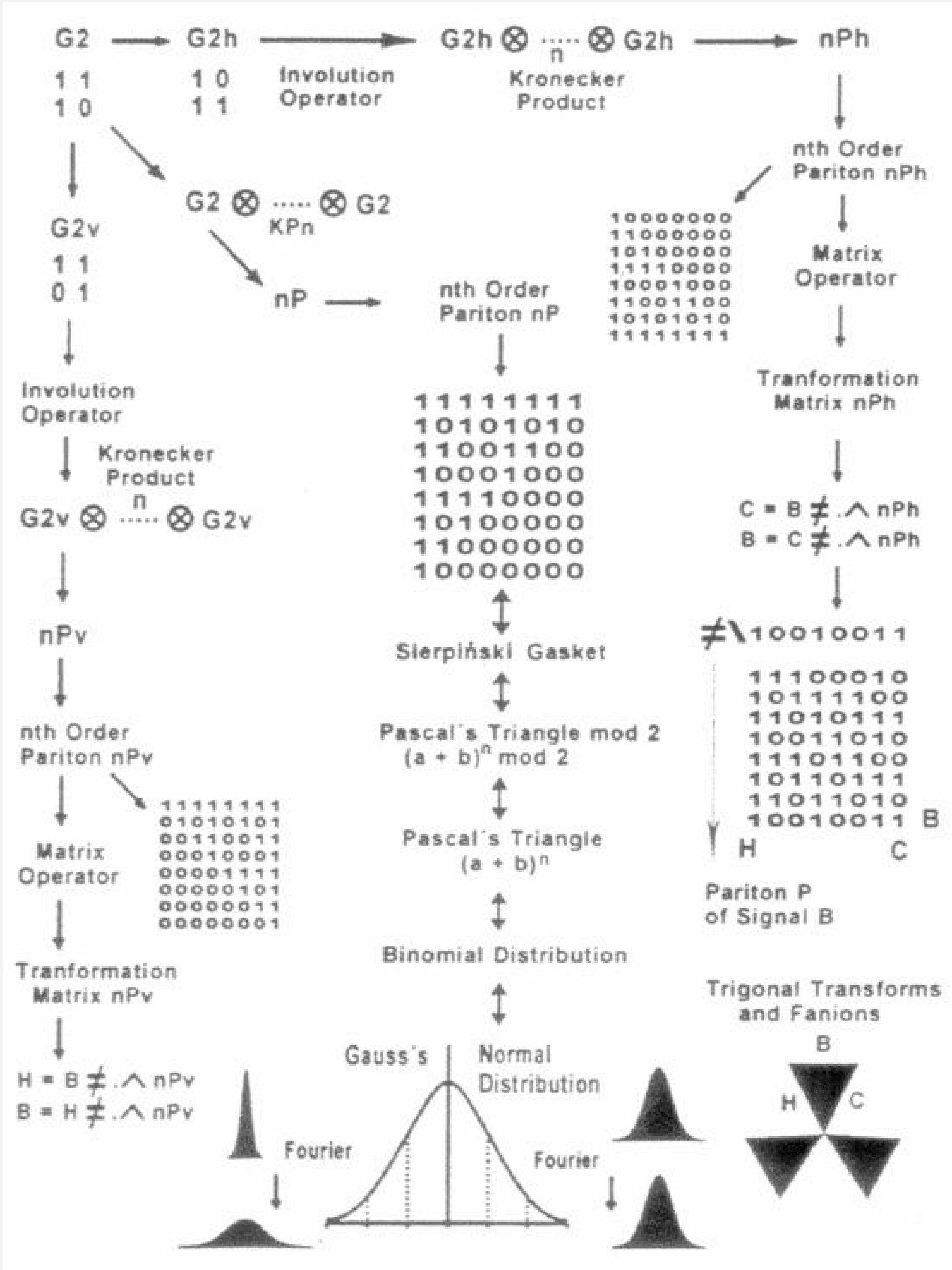

Figure 4.3[NdT] La logique de la parité en un clin d'œil[8]

La logique que l'on découvre par le parcours central de la Figure 4.3 est simple et judicieuse. Le pariton est l'équivalent du tamis ou crible de Sierpiǹski qui à son tour équivaut au triangle de Pascal modulo 2. Ce dernier est l'équivalent binaire du triangle de Pascal qui à son tour est la base de la distribution binomiale dont l'enveloppe est le graphe de la distribution normale de Gauss. Ainsi, le pariton **nP** d'ordre *n* et ses images dans un miroir vertical ou horizontal (**nPv, nPh**) sont – à toute échelle – les opérateurs de transformation orthogonale en algèbre binaire ou modulo 2, et, ainsi, les équivalents binaires des transformations de Fourier, de Walsh-Hadamard et des ondelettes. Le point crucial est que ces dernières transformations jouent un rôle central dans la modélisation et l'analyse des milieux excitables, et que l'on peut les comprimer considérablement par le biais de la transformation cognitive introduite dans la Section 3. Un autre aspect en vue de la modélisation des milieux excitables concerne l'existence de transformées trigonales au lieu des transformées orthogonales ci-dessus. Ceci est le sujet de notre Section suivante. De toute manière, les directions de recherche mentionnées dans cette Section encouragent à approfondir plus avant la logique de la parité, théorique et appliquée. Mais cela prend certainement plus que deux individus[NdT] pour mener à bien ce travail.

5 Vers la modélisation rétinienne à l'aide des fanions

Dans cette Section, nous faisons ressortir une seconde perspective d'orientation vers des applications de l'intégration de parité, corrélée au *modèle du fanion* de la Section 3, Figure 3.4, concernant la modélisation de la rétine dans des projets de réseaux digitaux/résistifs. Nous montrons que la topologie du fanion coïncide avec celle des réseaux résistifs et offre une perspective informationnelle nouvelle pour le calcul neuronal en termes d'algorithmes de vision et de traitement digital. L'objectif principal est de montrer comment des signaux se trouvent traités par le fanion et comment la structure d'un signal organise la topologie du fanion par des fronts d'onde propagés, d'une manière unique. Sous ce rapport, le fanion sert de première approximation pour des modèles rétiniens digitaux. Nous n'avons pas l'intention de mettre en opposition les avantages et les inconvénients entre les réseaux analogiques et les réseaux digitaux dans ce contexte. C'est tout à fait le contraire, car les réseaux résistifs vont nous aider à comprendre le traitement du signal dans des réseaux triangulaires de cellules avec des sous-structures coopératives.

Notre point de départ est un réseau normalisé en technologie d'implantation VLSI, où le réseau est modélisé par un réseau résistif discret bidimensionnel, disposé de manière régulière par interconnexion des voisins les plus proches.

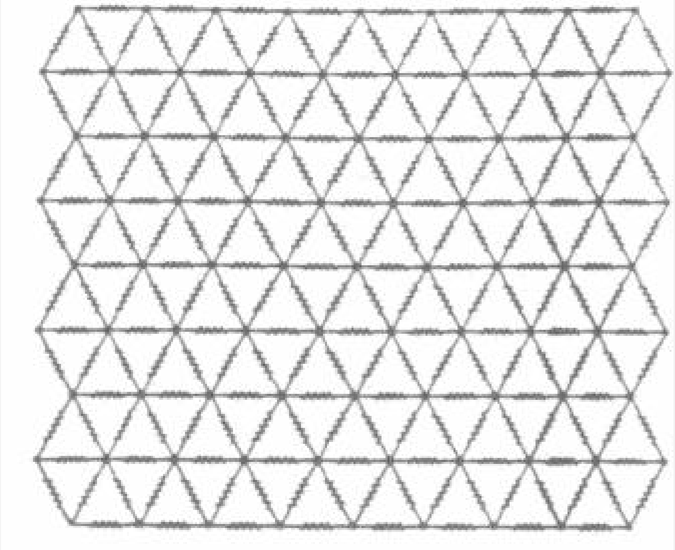

Figure 5.1   Topologie des Réseaux Résistifs

La représentation du réseau sur la Figure 5.1 illustre le type préféré pour les applications bidimensionnelles, à cause de sa symétrie maximale et de sa haute redondance (Mead 1989, Schempp 1993). Le modèle rétinien est constitué ici par un couplage des voisins les plus proches. Chaque nœud est connecté à ses voisins par une résistance R, et chaque nœud est connecté à la terre qui agit comme référence, par l'intermédiaire d'une conductance G. En technologie du silicium, cette topologie de réseau modélise la couche de photo-récepteurs, la couche "plexiforme" extérieure de cellules qui sont situées juste en dessous des photo-récepteurs, et la couche de cellules bipolaires de la rétine des vertébrés. En dépit des son abstraction par rapport à l'analogue biologique immensément plus compliqué, elle produit des résultats tout à fait semblables à ceux obtenus à partir de systèmes biologiques. Pour révéler sa structure interne d'une manière plus explicite, il est utile de montrer d'abord sa structure hexagonale, puisque cette dernière est duale de sa structure globale triangulaire.

La Figure 5.2 en donne l'illustration en montrant quatre hexagones concentriques assemblés en réseau résistif triangulaire. Chaque hexagone contient - indépendamment de sa dimension - six triangles équilatéraux, ou deux paires de trois triangles équilatéraux disposés comme deux structures trigonales alternées autour du centre de chaque hexagone, comme indiqué par les structures noires et blanches en forme de ventilateur (!) NdT au centre de la Figure 5.2.

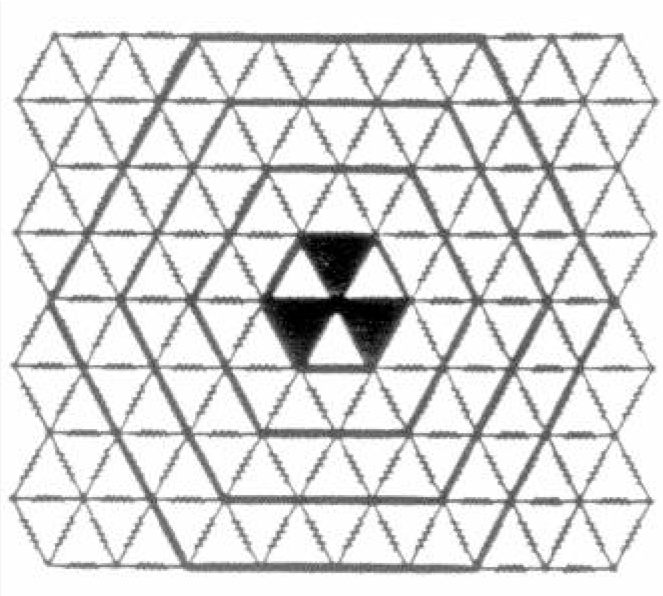

Figure 5.2   Réseaux concentriques hexagonaux

Considérons maintenant la Figure 5.3 . En regardant de plus près la topologie des réseaux résistifs, il apparaît que leur structure hexagonale contient de manière duale deux réseaux trigonaux concentriques (l'un ombré et l'autre non dans la Figure 5.3).

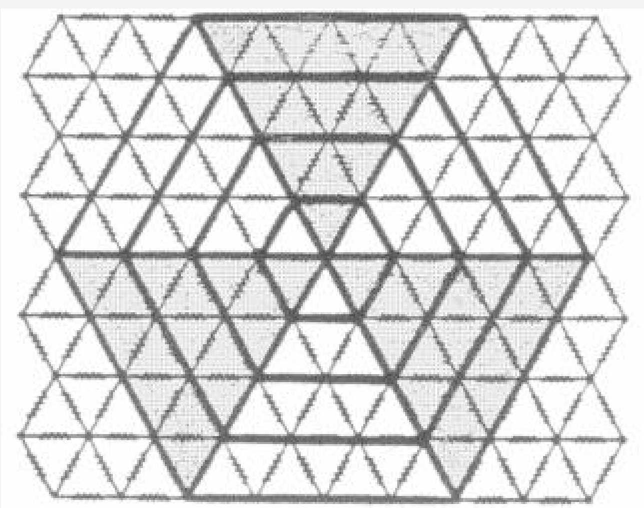

Figure 5.3   Réseaux concentriques trigonaux

La structure des deux réseaux coïncide précisément avec une rotation ternaire de 120° du fanion introduite dans la Section 3. Maintenant, l'image rétinienne d'une scène visuelle se compose d'une distribution continue bidimensionnelle de niveaux de gris, alors qu'une puce rétinienne de réseau résistif se compose d'un tableau de pixels, et d'un dispositif de balayage pour lire les résultats du calcul rétinien. La sortie de tout pixel est accessible par un scanner avec un registre de balayage horizontal et vertical le long des côtés de la puce. Chaque position du registre de balayage a un registre de décalage[NdT] de 1 bit et des circuits associés de sélection du signal. La principal tableau de pixels se compose de rangées alternées de pavés réctangulaires disposés pour former un motif hexagonal. Le scanner, le long du côté vertical, accède à n'importe quelle rangée de pixels, tandis que le scanner le long du côté horizontal guide le courant de sortie, de n'importe quel pixel choisi, sur la ligne de sortie de manière à ce que ce courant soit perçu par l'amplificateur extérieur senseur de courant (Mead 1989, Schempp 1993).

Si, maintenant, nous établissons une digression depuis les réseaux résistifs en considérant le fanion, sous sa forme tournée, comme un modèle cellulaire d'états excitables "*On*" et "*Off*", nous obtenons les résultats suivants pour le traitement de l'information dans ce réseau. Considérez d'abord la Figure 5.4 ci-dessous :

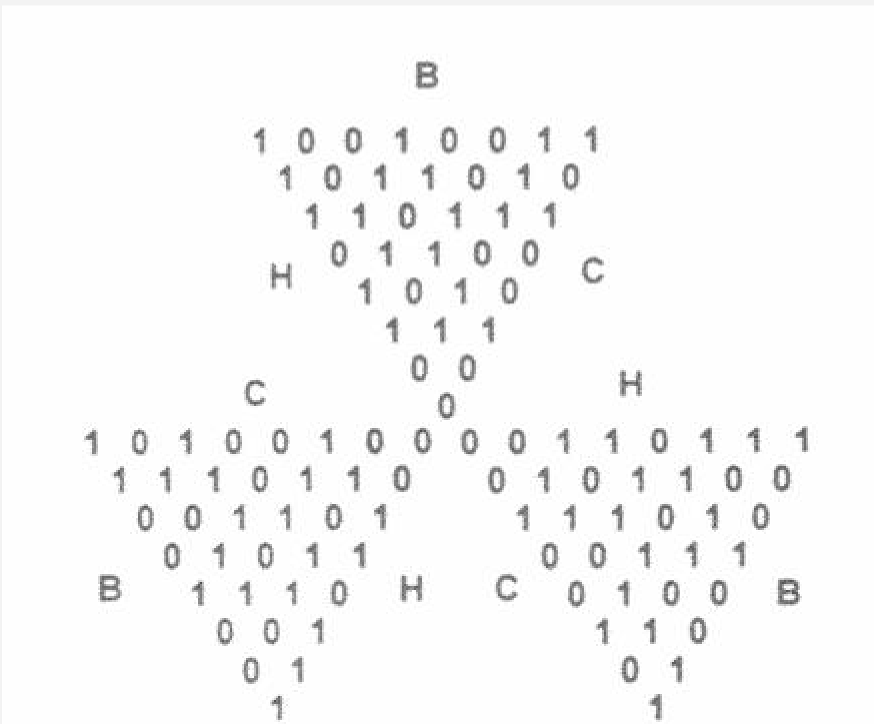

Figure 5.4   Le Réseau du Fanion

1. Chaque cellule de haut en bas correspond à un pixel, dont l'*état "On"* est *noir* c'est-à-dire 1, tandis que son *état "Off"* correspond à *clair* c'est-à-dire 0. Comme dans le cas des réseaux résistifs, la disposition des pixels est décalée de rangée en rangée d'un intervalle de 1/2 pixel.

2. Le fanion constitue ainsi un réseau ternaire de neuro-bits d'éléments excitables. Le motif d'excitation dépend seulement de la structure du signal et de son front d'onde propagé, modélisé par intégration de parité itérée par couples ($\neq\backslash B$). Cette dernière réalise un processus de balayage auto-organisé dont le résultat est la formation d'un motif auto-organisé sur le milieu excitable sous-jacent.
3. Chaque signal propagé par le fanion se traduit par la formation d'un motif unique avec des propriétés de compression de l'information. Les signaux aléatoires ou apériodiques

induisent un motif d'excitation correspondant irrégulier dans le fanion, à cause de leur incompressibilité. Cela produit un motif apparemment chaotique, et l'apériodicité est reflétée à la fois dans la transformée hélicoïdale (*H*) et dans la transformée cognitive (*C*) (pas de compression).

4. Les signaux avec des structures redondantes, répétitives ou palindromiques apparaissent comprimés dans l'héliçon *H* et le cogniton *C*, c'est-à-dire que les deux transformées, l'hélicoïdale et la cognitive, compriment l'information. Toute redondance, périodicité ou symétrie interne du signal *B* engendre dans le fanion un motif d'excitation dilué. L'entropie du signal est préservée en vertu de la propriété de conservation de l'entropie du processus d'intégration et de propagation. Remarquer qu'une propagation asymétrique de différences symétriques est un processus préservant l'entropie en vertu de la loi de bisymétrie $(a_\circ b)_\circ(c_\circ d) \underline{\in} (a_\circ c)_\circ(b_\circ d)$.

5. Si nous interprétons la topologie des états excités du fanion comme un motif visuel émergeant du signal *B*, alors la transformée cognitive *C* de *B* représente ce motif sous forme comprimée d'une part, et permet de retransformer le motif à cause de sa propriété de la transformation d'être auto-inverse, d'autre part. Cette conclusion mérite un examen plus approfondi dans des modèles spécifiques de traitement rétinien de l'information.

6. Mathématiquement, le fanion (partie supérieure de la Figure 5.4) est un opérateur matriciel ternaire ou trigonal. Une rotation de 120° transforme le fanion de *B* en fanion de *H* (partie inférieure droite de la Figure 5.4). Une autre rotation de 120° transforme ce dernier en fanion de *C* (partie inférieure gauche de la Figure 5.4), et une troisième rotation retransforme ce dernier en fanion du signal original *B*. A chaque transformation, la topologie des éléments excités, c'est-à-dire les états "*On*" et "*Off*", demeure invariante.

7. En termes d'algèbre modulo 2, la seconde rangée de chaque arrangement trigonal dans la Figure 5.4 est la dérivée (différentielle booléenne) de la première rangée; alors, la première rangée est l'intégrale discrète de la seconde rangée. Cette propriété est vraie pour chaque rotation successive, dans un sens ou dans l'autre, de la structure du haut de la Figure 5.4, par suite de la symétrie ternaire de la structure.

On insistera sur le fait que le fanion, aussi bien que le pariton généralisé (qui contient implicitement le fanion) sont *les points de départ* de la modélisation d'une rétine artificielle comme milieu excitable avec des topologies triangulaires ou hexagonales. Le lecteur est prié de se référer à Langlet (1993, 1994a), Mead (1989), Resnikoff (1989) et Schemp (1993) pour plus de détails à ce propos. Il y a encore un dernier point qui doit être mentionné pour pousser plus avant les études concernant les milieux excitables à l'aide de la logique de la parité. Un pariton ou un fanion à une échelle suffisamment grande convient, dans tous les cas, comme modèle du traitement complexe et auto-organisé de l'information. Que sa structure se rapporte aux *champs de courants* de Köhler, aux *clusters d'excitation* de Horridge, aux *champs à portes dipolaires* de Grossberg, ou aux *spins d'Ising* de Hopfield, tout ce qui compte revient à considérer des *différences entre états élémentaires, donc des parités*.

Remerciements

Ce travail a été soutenu par la Fondation Allemande pour la Recherche (DFG) et par le Groupe de Recherche Interdisciplinaire sur les Sciences Cognitives des universités de Brême et d'Oldenburg. Je suis fort redevable au Prof.Dr. Eckart Scheerer pour le soutien à cette étude, ainsi qu'au Dr. Gérard A. Langlet pour ses suggestions, ses commentaires critiques à propos des travaux précédents de l'auteur sur le sujet, et pour ses encouragements à poursuivre des études plus poussées dans ce domaine.

Références

[1] Dress,A.W.M., Gerhardt,M., Jaeger,N.I., Plath,P.J. & Schuster,H. (1985), Some proposals concerning the mathematical modeling of oscillating heterogeneous catalytic reactions on metal surfaces. *In* : Rensing,L. & Jaeger,N.I. (eds. *Temporal Order*, Springer, Berlin.

[2] Kaandorp,J.A. (1994) *Fractal Modelling : Growth and Form in Biology*. Springer, Berlin.

[3] Langlet,G.A. (1991) Paritons and Cognitons : Towards a new Theory of Information. Part I : APL-CAM Journal, 13-2-399-421. Part II : APL-CAM Journal,13-3, 709-743.

[4] Langlet,G.A. (1992) Towards the Ultimate APL-T.O.E. ACM, APL Quote-Quad, 23,1, July 1992, 118-132.

[5] Langlet,G.A. (1993) New Mathematics for the Computer, *APL as a Tool of Thought VIII Conference Proceedings*, ACM, NY/SIGAPL TOTVIII, New York, Janvier 1993.

[6] Langlet,G.A. (1994) The power of Boolean computing in APL, La Hulpe (IBM European Education Centre), Belgique, *SHARE Europe 1994 Spring Conference Proc*. ISSN 0255-6464, 403-430.

[7] Langlet,G.A. (1994a) De l'algèbre de Hadamard à la Transformation Cognitive, Les Nouvelles d'APL, AFAPL, Paris, N° 11, 65-92.

[8] Langlet,G.A. (1994b) The APL Theory of Human Vision, APL Quote-Quad, ACM, Vol. 25, Sept. 1994, 105-121.

[9] Lüneburg,M. (1994) Structure Formation in Excitable Media. *In* : Nonnenmacher,C.L., Losa,G.A. & Weibel,L.R. (eds.) *Fractals in Biology and Medicine*, Birkhäuser, Bâle.

[10] Mead,C. (1989) *Analog VLSI and Neural Systems*. Addison Wesley, Reading.

[11] Pao,Y.H. (1989) *Adaptative Pattern Recognition and Neural Networks*. Addison Wesley, Reading.

[12] Peitgen,H.O., Jürgens,H. & Saupe,D. (1992) *Chaos and Fractals : New Frontiers of Science*, Springer, Berlin.

[12i] Resnikoff,H.L. (1989) *The Illusion of Reality*, Springer Verlag, New York /Berlin.

[13] Russel,B. (1921) *The Analysis of Mind*. The Muirhead Library of Philosophy, Allen & Unwin, Londres.

[14] Schempp,W. (1993) Analog VLSI Network Models, Cortical Linking Neural Network Models, and Quantum Holographic Neural Technology. In : Pribram,K.H. (ed.) *Rethinking Neural Networks : Quantum Fields and Biological Data*. 223-297, Erlbaum, Hillsdale.

[15] Schroeder,M. (1991) *Fractals, Chaos, Power Laws : Minutes from an infinite paradise*. Freeman, New York.

[16] Semon,R.v. (1909) *Die mnemische Empfindungen in ihren Beziehungen zu den Originalempfindungen*. Engelmann, Leipzig.

[17] Wolfram, S. (1994) *Cellular Automata and Complexity : Collected Papers*, Addison-Wesley, Reading.

[18] Zaus,M. (1995/6) *Artificial Evolution in Cognitive Science and Technology*. En préparation pour : Chapman & Hall, Londres, et International Thompson Computer Press, Amsterdam, ISBN 0-412486601.

[19] Zaus,M. (1994a) Theoretische und andgewandte Paritätslogik. APL-CAM Journal, Vol. 16, N° 3, 448-468, Computational and Applied Mathematics Group, APL Society Belgium, Brussels.

[20] Zaus,M. (1994b) La Logique de la Parité, théorique et appliquée. Les Nouvelles d'APL, N° 12-13, 42-66, Paris.

[21] Zaus,M. (1995) A Computational Approach to Algorithmic Information Compression. Berichte aus dem Institut für Kognitionsforschung, Univ. d'Oldenburg, en préparation.

[22] Zaus,M. (1995a) LEIBNIZ : A program library on binary algebra and parity logic. Berichte aus dem Institut für Kognitionsforschung, Univ. d'Oldenburg, sous presse.

[23] Zaus,M. (1995b) Evolutionary Genetic Optimizers. Berichte aus dem Institut für Kognitionsforschung, Université d'Oldenburg, en préparation.

** Li, M. & Vitanyi, P. 1993. An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Application, Springer, Berlin.

[1]Pour des revues explicatives et condensées, voir Langlet (1992, 1994), ou Zaus (1994a,b).

NdlR Ceci concerne, en clair, la reconnaissance des contours; en Théorie des Graphes, il s'agit de résoudre le célèbre problème du Voyageur de Commerce, mathématiquement NP-complet, car il n'existe pas de solution polynomiale (ni de méthode mathématique absolue).

[2]Voir, en particulier, Peitgen et al. (1992) ou Kaandorp (1994).

NdT Le mot original est "*emulates*", mais le verbe "émuler" n'a jamais existé en français.

NdT en français et en mathématiques, on parle aussi d'une *fonctionnelle* pour une fonction-opérateur agissant sur une fonction.

[3] Noter que la première composante b_1 Î *R*, est toujours égale à la première composante b_1 Î *B*, ce qui est habituel en mathématiques concernant les cumuls, ou les sommes partielles comme dans la Définition (3) ci-dessus.

NdT en anglais"number crunching".

NdT en anglais, l'auteur utilise l'acronyme **PFM** pour "*Parity Feedback Machines*".

NdT mais aussi non modulo 2.

[4] le produit matriciel booléen *x*≠.∧*y* est l'équivalent binaire de *x*+.×*y* , le produit scalaire habituel S*xy* . Nous avons adopté la notation utilisant le point *x* f.g *y* , où f et g sont des opérations binaires, du langage de programmation APL, à cause de sa clarté pour traiter les produits internes généralisés.

NdT La symétrie diagonale est vraie lorsque la dimension est une puissance de 2. Dans le cas général, la symétrie mise en jeu est une symétrie par rapport à un point virtuel situé au centre de la matrice.

NdT en anglais "Fast Cognitive Transform"

NdT Il s'agit en fait de l'opération <u>inverse</u> de l'intégration binaire; à savoir la dérivation ou différenciation binaire (prise de différences booléennes ou modulo 2 successives, que l▿on pourrait noter ≠\$^{-1}$). On peut aussi considérer qu'il s'agit d'appliquer ≠/ sur chaque paire successive. Voir l▿article de G. Langlet, immédiatement après celui-ci : « Des Fanions à la transformée cognitive <u>numérique</u> ».

[5]Le lecteur devrait remarquer que les modèles courants actuels de réseaux de neurones ou d'algorithmes génétiques sont truffés d'hypothèses ad hoc, provenant à la fois d'un point de vue mathématique et d'un point de vue conceptuel. Dans l'approche adoptée ici, il y a peu de place pour le "ad hoc", la modélisation est essentiellement guidée par le rasoir d'Ockham : "*Il est vain d'essayer avec plus que ce qui peut être fait avec moins.*"

NdT Terme préféré à "implémenter", franglais.

[6] bruit en 1/f, parasites, fluctuations semi-corrélées, bruit fractal. (NdT. Voir, à ce sujet les explications données dans Les Nouvelles d'APL N° 14, pp.103-108).

[7] Reproduit d'après Lüneburg (1994), p.267. Voir aussi

Schroeder (1993) chapitre 17, pour une dicussion du travail de Dress et al. concernant les automates cellulaires.

NdT Vu la petitesse des caractères, le lecteur est prié d▿excuser l'absence de traduction pour cette figure.

[8]Pour plus de détails, voir en particulier Langlet (1992, 1994, 1994a) et Zaus (1994a,b).

NdT En anglais ≰two for tango”, guillemets compris.

NdT "Fan" signifie, entre autres, "ventilateur" en anglais.

NdT "Shift-register".