

I) INTRODUCTION

Dans cet article on trouvera le calcul des **MOMENTS**, par rapport à une droite d'un ensemble de points, courbes ou surfaces coplanaires et de volumes de révolution autour d'un axe. **N réel positif ou nul** (entier positif ou nul en pratique) sera l'ordre du moment :

0 : nb. de points, longueur de courbe, surface d'une aire plane.

1 : sera utile pour le calcul de l'abscisse d'un barycentre.

2 : moments quadratiques, rayon de giration etc .

Les **MOMENTS** ainsi calculés sont des grandeurs **PUREMENT GÉOMÉTRIQUES** : ils s'expriment en **mètres**^{puissance entière} (dans le système MKSA) :

| | | | |
|-----------------------|-------------------------|--------------|-----------|
| le moment d'ordre N | de points isolés | s'exprime en | m^N |
| | d'une courbe | | m^{N+1} |
| | d'une surface | | m^{N+2} |
| | d'un volume | | m^{N+3} |

Les points sont affectés de « **poïds** » (nombres réels pouvant représenter n'importe quoi : masses, charges électriques, probabilités, prix, longueurs, surfaces, volumes...) ou de « **coefficients** » (nombres réels sans dimension physique de somme égale à 1).

Ces MOMENTS (géométriques) permettront le calcul des **MOMENTS MÉCANIQUES**. Par exemple les **MOMENTS D'INERTIE** (en $\text{Kg}\cdot\text{m}^2$ dans le système MKSA) seront obtenus en affectant les points de « **MASSES** » (kg), les courbes de « **MASSES LINÉAIRES** » (kg/m), les aires de « **MASSES SURFACIQUES** » (kg/m^2), les volumes de « **MASSES VOLUMIQUES** » (kg/m^3).

On affectera le plan d'un système d'axes où **oy** est la droite par rapport à laquelle on veut calculer les **MOMENTS**.

II) UTILISATION PRATIQUE

Chargement de l'espace de travail

load 'moments'

1) Outils généraux

Fixation du nombre de chiffres affichés d'un nombre flottant **1 <: nc <: 18**

P nc

Mesure du temps machine pour exécuter une instruction

R=. Chrono 'instruction'

R=. NE Chrono 'instruction' NB. moyenne de NE exécutions

Parties réelles et imaginaires des éléments d'un vecteur (ou matrice) complexe

R=. RE z0 z1...zn

R=. IM z0 z1...zn

Modules et arguments des éléments d'un vecteur (ou matrice) complexe

R=. RO z0 z1...zn

R=. AR z0 z1...zn

Découpage de l'intervalle [a,b] en **ns** sous-intervalles de même longueur

R=. ns sint a,b

Intégration numérique méthode de Gauss-Legendre composite

fonc (verbe : fonction d'une variable à intégrer); a,b (intervalle d'intégration) divisé en ns sous-intervalles égaux

R =. ns fonc INTGLC a,b

Fonction $f_N(a,b) = (a^{N+1}-b^{N+1})/(a-b)$ réduite à $(n+1)a^N$ si $a=b$ a et b réels ou complexes

R=. N fi a,b

2) Points isolés

Un ensemble fini de points coplanaires est représenté par leurs affixes $z_0 z_1 \dots z_n$

Tracé d'un ensemble de points

$$PLOTPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

Abscisse du Barycentre des points $z_0 z_1 \dots z_n$

$$R = . p \quad XGPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. Affectés tous du même poids (p non nul)

$$R = . p_0 p_1 \dots p_n \quad XGPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$ (somme non nulle)

Moment quadratique/oy des points $z_0 z_1 \dots z_n$

$$R = . p \quad MQPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. affectés du même poids p

$$R = . p_0 p_1 \dots p_n \quad MQPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$

Rayon de giration/oy des points $z_0 z_1 \dots z_n$

$$R = . p \quad RAYGPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. affectés du même poids p

$$R = . p_0 p_1 \dots p_n \quad RAYGPTS \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$

Moment d'ordre N (nombre $>: 0$) des points $z_0 z_1 \dots z_n$ par rapport à oy

$$R = . p \quad (N \text{ MPTS}) \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. tous de même poids p (nb réel)

$$R = . p_0 p_1 \dots p_n \quad (N \text{ MPTS}) \quad z_0 z_1 \dots z_n$$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$ (nb réels)

NB. Remarque : N est le plus souvent un entier $>: 0$

3) Segment de droite et ligne brisée

On utilise des points d'affixes $z_0 z_1 \dots z_n$ pour représenter une ligne brisée et $z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$ pour indiquer que l'on peut utiliser $z_0 z_1 \dots z_n z_0$ dans le cas d'une ligne brisée fermée (polygone)

Tracé d'une ligne brisée plane

$$PLOTLBR \quad z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Longueur d'une ligne brisée

$$R = . \text{LONGLBR} \quad z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Surface délimitée par une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

$$R = . \text{SURFLBR} \quad z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Abscisse du Barycentre d'une ligne brisée

$$R = . \text{XGLBR} \quad z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Abscisse du barycentre de la surface délimitée par une ligne brisée et sa projection sur oy

$$R=. \text{XGSLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment quadratique/oy d'une ligne brisée

$$R=. \text{MQLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Rayon de giration/oy d'une ligne brisée

$$R=. \text{RAYGLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment quadratique/oy de la surface délimitée par une ligne brisée et sa projection sur oy

$$R=. \text{MQSLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Rayon de giration/oy de la surface délimitée par une ligne brisée et sa projection sur oy

$$R=. \text{RAYGSLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Surface générée par la rotation/oy d'une ligne brisée

$$R=. \text{SROTLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Volume engendré par la rotation/oy de la surface délimitée par une ligne brisée et sa projection orthogonale/oy

$$R=. \text{VROTLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment quadratique/oy de la surface engendrée par la rotation/oy d'une ligne brisée

$$R=. \text{MQSROTLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

NB. Rayon de giration/oy de la surface engendrée par la rotation/oy d'une ligne brisée

$$R=. \text{RAYGSROTLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment quadratique/oy du volume engendré par la rotation /oy d'une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

$$R=. \text{MQVROTLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Rayon de giration/oy du volume engendré par la rotation /oy d'une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

$$R=. \text{RAYGVROTLBR } z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment d'ordre N (nombre >: 0) par rapport à une droite prise pour axe oy du segment de droite ab défini par les affixes (za,zb) de a et b

$$R=. N \text{MLSEG } (z_a, z_b)$$

Moment d'ordre N (nombre >: 0) de la surface du trapeze défini par le segment ab (affixes z_a, z_b) et sa projection orthogonale sur oy

$$R = . N MSSEG (z_a, z_b)$$

Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) d'une ligne brisée

$$R = . N MLBR z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) de la surface délimitée par une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

$$R = . N MSLBR z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) de la surface engendrée par la rotation/oy d'une ligne brisée

$$R = . N MSROTLBR z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) du volume engendré par la rotation/oy d'une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

$$R = . N MVROTLBR z_0 z_1 \dots z_n (z_0)$$

3) Courbe plane d'équations paramétriques $X=f(t)$ $Y=g(t)$ $X'=fp(t)$ $Y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

L'intervalle $[t_1, t_2]$ est divisé en ns sous-intervalles de même longueur

Tracé d'une ligne courbe plane d'équations $X=f(t)$ $Y=g(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

$$(f \text{ ` } g) \text{ PLOTLC } ns (t_1, t_2)$$

Longueur de la ligne courbe d'équations $X=f(t)$ $Y=g(t)$ $X'=fp(t)$ $Y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

$$R = . (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ LONGC } ns (t_1, t_2)$$

Surface limitée par la courbe d'équations $X=f(t)$ $Y=g(t)$ $Y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

et sa projection orthogonale sur oy

$$R = . (f \text{ ` } gp) \text{ SURFC } ns (t_1, t_2)$$

Abscisse du barycentre de la ligne courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ $t_1 <: t <: t_2$

$$R = . (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ XGLC } ns (t_1, t_2)$$

Abscisse du barycentre de la surface plane délimitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

$$R = . (f \text{ ` } gp) \text{ XGSC } ns (t_1 t_2)$$

Moment quadratique/oy de la courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ $t_1 <: t <: t_2$

$$R = . (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ MQLC } ns (t_1 t_2)$$

Rayon de giration/oy de la ligne courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ $t_1 <: t <: t_2$

$$R=. (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ RAYGC ns } (t_1 \ t_2)$$

Moment quadratique/oy de la surface plane délimitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

$$R=. (f \text{ ` } gp) \text{ MQSC ns } (t_1 \ t_2)$$

Rayon de giration/oy de la surface plane délimitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

$$R=. (f \text{ ` } gp) \text{ RAYGSC ns } (t_1 \ t_2)$$

Surface engendrée par la rotation/oy de la courbe plane d'équations

$x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

$$R=. (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ SROTC ns } (t_1, t_2)$$

Volume engendré par la rotation/oy de la surface plane limitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

$$R=. (f \text{ ` } gp) \text{ VOLROTC ns } (t_1, t_2)$$

Moment quadratique de la surface engendrée par la rotation/oy de la courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

$$R=. (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ MQSROTC ns } (t_1, t_2)$$

Rayon de giration/oy de la surface engendrée par la rotation/oy de la courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

$$R=. (f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ RAYGSROTC ns } (t_1 \ t_2)$$

Moment quadratique du volume engendré par la rotation/oy de la surface plane délimitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$).

$$R=. (f \text{ ` } gp) \text{ MQVROTC ns } (t_1, t_2)$$

Rayon de giration du volume engendré par la rotation/oy de la surface plane délimitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

$$R=. (f \text{ ` } gp) \text{ RAYGVROTC ns } (t_1 \ t_2)$$

Moment d'ordre N (nombre $>: 0$) par rapport à une droite prise pour axe oy de la ligne courbe coplanaire ($x=f(t)$ $y=g(t)$ $y'=gp(t)$ $t_1 <: t <: t_2$)

$$R=. N ((f \text{ ` } fp \text{ ` } gp) \text{ MLC ns})^0 _ (t_1, t_2)$$

Moment d'ordre N (nombre >: 0) par rapport à une droite prise pour axe oy de la surface délimitée par la ligne courbe coplanaire (x=f(t) y=g(t) y'=gp(t) t1<: t<: t2) et sa projection sur oy

$$R = \int_{t_1}^{t_2} N ((f' \text{ } gp) \text{ } MSC \text{ } ns)''0 _ (t_1, t_2)$$

Moment d'ordre N (nombre >: 0) par rapport à une droite prise pour axe oy de la surface engendrée par la rotation /oy de la courbe coplanaire (x=f(t) y=g(t) x'=fp(t) y'=gp(t) t1 <: t <: t2)

$$R = \int_{t_1}^{t_2} N ((f' \text{ } fp' \text{ } gp) \text{ } MSROT \text{ } ns)''0 _ (t_1, t_2)$$

Moment d'ordre N (nombre >: 0) par rapport à une droite prise pour axe oy du volume engendré par la rotation de la surface délimitée par la ligne courbe coplanaire (x=f(t) y=g(t) y'=gp(t) t1 <: t <: t2) et sa projection orthogonale sur oy

$$R = \int_{t_1}^{t_2} N ((f' \text{ } gp) \text{ } MVROT \text{ } ns)''0 _ (t_1, t_2)$$

III) ESPACE DE TRAVAIL

NB. MOMENTS.ijs

require 'plot'

NB. Fixation du nombres de chiffres affichés d'un nombre flottant $1 <: nc <: 18$

NB. P nc

P =: 9!:11

NB. Mesure du temps machine nécessaire pour exécuter une instruction

NB. R=. Chrono 'instruction'

NB. R=. NE Chrono 'instruction' NB. moyenne de NE exécutions

Chrono =: 6!:2

NB. Parties réelles et imaginaires des éléments d'un vecteur (ou matrice) complexe

NB. R=. RE z0 z1...zn

NB. R=. IM z0 z1...zn

RE =: ({:@:+.)"0

IM =: ({:@:+.)"0

NB. Modules et arguments des éléments d'un vecteur (ou matrice) complexe

NB. R=. RO z0 z1...zn

NB. R=. AR z0 z1...zn

RO =: ({:@:*.)"0

AR =: ({:@:*.)"0

NB. Découpage de l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. n sint a,b

sint =: {.@]+-/@|.@]*i.@>:@[%]

NB. Pour le polynôme de LEGENDRE de degré 7 (objectif : intégration numérique)

NB. Racines (LEG7), coefficients de pondération (LEGp7)

**LEG7 =: _0.949107912342759 _0.741531185599395 _0.405845151377397 0 0.405845151377397
0.741531185599394 0.949107912342759**

**LEGp7 =: 0.0647424830844263 0.139852695744671 0.190915025252494 0.208979591836819
0.19091502525249 0.139852695744674 0.0647424830844254**

NB. Intégration méthode de Gauss-Legendre composite utilisant le polynôme de LEGENDRE de degré 7

NB. fonc (fonction d'une variable à intégrer); a,b (intervalle d'intégration) divisé en n sous-intervalles égaux

NB. R =. n fonc INTGLC a,b

INTGLC =: {f}a

msi =. (>@ (2&(<))) x ({.@]+i.@>:@[*({:-.})@]%) y NB. matr des sous-intervalles

VR =. i.0 [I=.i.x

for_i. I do. VR =. VR, +/LEGp7*u LEG7 {{0.5*(+/y)-x*(-/y)}}"0 _ i{msi end.

(+/VR)*(-/y)%x

}}

NB. Fonction $f_N(a,b) = (a^{N+1}-b^{N+1})/(a-b)$ réduite à $(n+1)a^n$ si $a=b$

NB. $R = N$ si a, b

fi = (-/@:(/ ^>:@:)]%-/ @:)]`(>:@:[*{.@:]^)]@.(=/@:)]"0 _

NB. On utilise des points d'affixes **z0 z1 ... zn** pour représenter une ligne brisée et **z0 z1 ...zn (z0)** pour

NB. indiquer que l'on peut utiliser **z0 z1 ... zn z0** dans le cas d'une ligne brisée fermée (polygone)

NB. 1) Tracés

NB. Tracé d'un ensemble de points

NB. PLOTPTS z0 z1 ...zn (z0)

PLOTPTS =: {}m

z=. 'type point;pensize 4' plot y

}}

NB. Tracé d'une ligne brisée plane

NB. PLOTLBR z0 z1 ... zn (z0)

PLOTLBR =: plot@:]

NB. Tracé d'une ligne courbe plane d'équations $X=f(t)$ $Y=g(t)$ ($t_1 < t < t_2$)

NB. l'intervalle $[t_1, t_2]$ est divisé en n sous-intervalles de même longueur

NB. (f ` g) PLOTLC n (t_1, t_2)

PLOTLC =: {}c

`f17f g17g'=:m

z=.plot(f17f j. g17g) n sint y

z=.4!:55 'f17f';'g17g'

"

}}

NB. 2) Points isolés

NB. Un nombre fini de points $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. Moment d'ordre N (nombre $>: 0$) des points $z_0 z_1 \dots z_n$ par rapport à oy

NB. $R = p$ (N MPTSoy) $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. tous de même poids p (nb réel)

NB. $R = p_0 p_1 \dots p_n$ (N MPTS) $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$ (nb réels)

MPTS =: {+/x*(RE y)^m}}

NB. Remarque : N est le plus souvent un entier $>: 0$

NB. Abscisse du Barycentre des points $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. $R = p$ XGPTS $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. Affectés tous du même poids

NB. $R = p_0 p_1 \dots p_n$ XGPTS $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$ (somme non nulle)

XGPTS =: (1 MPTS) % (0 MPTS)

NB. Moment quadratique/oy des points $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. $R = \sum p_i MQPTS z_0 z_1 \dots z_n$

NB. affectés du même poids p

NB. $R = \sum p_0 p_1 \dots p_n MQPTS z_0 z_1 \dots z_n$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$

$MQPTS =: 2 MPTS$

NB. Rayon de giration d'un ensemble de points $z_0 z_1 \dots z_n$

NB. $R = \sum p_i RAYGPTS z_0 z_1 \dots z_n$

NB. affectés du même poids p

NB. $R = \sum p_0 p_1 \dots p_n RAYGPTS z_0 z_1 \dots z_n$

NB. de poids $p_0 p_1 \dots p_n$

$RAYGPTS =: \{ \% : x ((2 MPTS) \% (0 MPTS)) y \}$

NB. 3) Courbe plane d'équations paramétriques $X=f(t) Y=g(t) X'=fp(t) Y'=gp(t) (t_1 <: t <: t_2)$

NB. Moment d'ordre N (nombre $>: 0$) par rapport à une droite prise pour axe oy

NB. de la ligne courbe coplanaire ($x=f(t) y=g(t) y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2$)

NB. calcul avec division de l'intervalle (t_1, t_2) en n sous-intervalles égaux

NB. $R = \sum N ((f' fp' gp) MLC n)^0 _ (t_1, t_2)$ NB. $x=f(t) y=g(t) y'=gp(t)$

$MLC =: \{ \} c$

$f' f' f' p' g' gp' =: m$

$F17F =: x \& \{ \{ ((f' f' y)^x) \% (*: f' f' p' y) + (*: g' gp' y) \} \}$

$R = .n F17F INTGLC y$

$z = .4! : 55 'F17F'; 'f' f'; 'f' f' p'; 'g' gp'$

R

$\}$

NB. Moments d'ordre N (nombre $>: 0$) par rapport à une droite prise pour axe oy

NB. de la surface délimitée par la ligne courbe coplanaire ($x=f(t) y=g(t)$)

NB. $y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

NB. calcul avec division de l'intervalle (t_1, t_2) en n sous-intervalles égaux

NB. $R = \sum N ((f' gp) MSC n)^0 _ (t_1, t_2)$

$MSC =: \{ \} c$

$f' g' gp' =: m$

$F17F =: x \& \{ \{ ((f' f' y)^{1+x}) * (g' gp' y) \} \}$

$R = .n F17F INTGLC y$

$z = .4! : 55 'F17F'; 'f' f'; 'g' gp'$

$R \% x + 1$

$\}$

NB. Moment d'ordre N (nombre $>: 0$) par rapport à une droite prise pour axe oy

NB. de la surface engendrée par la rotation /oy de la ligne courbe coplanaire

NB. ($x=f(t) y=g(t) x'=fp(t) y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2$)

NB. calcul avec division de l'intervalle (t_1, t_2) en n sous-intervalles égaux

NB. $R = \sum N ((f' fp' gp) MSROTC n)^0 _ (t_1, t_2)$ NB. $x=f(t) y=g(t) y'=gp(t)$

$MSROTC =: \{ \{ 2p_1 * (x+1) (m MLC n)^0 1 y \} \}$

NB. Moment d'ordre N (nombre >: 0) par rapport à une droite prise pour axe oy
 NB. du volume engendré par la rotation de la surface délimitée par la ligne courbe coplanaire
 NB. $(x=f(t) y=g(t) y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2)$ et sa projection orthogonale sur oy
 NB. approximation avec division de l'intervalle (t_1, t_2) en n sous-intervalles égaux
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' gp) MVROTC n)^0_{(t_1, t_2)}$ NB. $x=f(t) y=g(t) y'=gp(t)$
 $MVROTC =: \{ \{ 2p1*(x+1)(m MSC n) \}^0_{1 y} \}$

NB. Longueur de la ligne courbe d'équations $X=f(t) Y=g(t) X'=fp(t) Y'=gp(t)$
 NB. $(t_1 <: t <: t_2)$, intervalle divisé en n sous-intervalles
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' fp' gp) LONGC n)_{(t_1, t_2)}$
 $LONGC =: \{ \{ 0 (m MLC n) \}^0_{y} \}$

NB. Surface limitée par la courbe d'équations $X=f(t) Y=g(t) Y'=gp(t)$
 NB. $(t_1 <: t <: t_2)$ et sa projection orthogonale sur oy
 NB. intervalle divisé en n sous-intervalles
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' gp) SURFC n)_{(t_1, t_2)}$
 $SURFC =: \{ \{ 0 (m MSC n) \}^0_{y} \}$

NB. Abscisse du barycentre de la ligne courbe plane d'équations
 NB. $x=f(t) y=g(t) x'=fp(t) y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2$
 NB. calcul fait en divisant $[t_1, t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' fp' gp) XGLC n)_{(t_1, t_2)}$
 $XGLC =: \{ \{ \% / 1 0 (m MLC n) \}^0_{y} \}$

NB. Abscisse du barycentre de la surface plane délimitée par la courbe d'équations
 NB. $x=f(t) y=g(t) x'=fp(t) y'=gp(t) (a <: t <: b)$
 NB. et sa projection orthogonale sur oy
 NB. calcul fait en divisant $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' gp) XGSC n)_{(a, b)}$
 $XGSC =: \{ \{ \% / 1 0 (m MSC n) \}^0_{y} \}$

NB. Moment quadratique/oy de la ligne courbe plane d'équations
 NB. $x=f(t) y=g(t) x'=fp(t) y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2$
 NB. calcul fait en divisant $[t_1, t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' fp' gp) MQLC n)_{(t_1, t_2)}$
 $MQLC =: \{ \{ 2 (m MLC n) \}^0_{y} \}$

NB. Rayon de giration/oy de la ligne courbe plane d'équations
 NB. $x=f(t) y=g(t) x'=fp(t) y'=gp(t) t_1 <: t <: t_2$
 NB. calcul fait en divisant $[t_1, t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur
 NB. $R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((f' fp' gp) RAYGC n)_{(t_1, t_2)}$
 $RAYGC =: \{ \{ \% : \% / 2 0 (m MLC n) \}^0_{y} \}$

NB. Moment quadratique/oy de la surface plane délimitée par la courbe d'équations

NB. $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

NB. et sa projection orthogonale sur oy

NB. calcul fait en divisant $[t_1,t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. (f`gp) MQSC n (t1 t2)

$$\mathbf{MQSC =: \{\{2 (m MSC n)"0 _y\}}$$

NB. Rayon de giration/oy de la surface plane délimitée par la courbe d'équations

NB. $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$) et sa projection orthogonale sur oy

NB. calcul fait en divisant $[t_1,t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. (f`gp) RAYGSC n (t1 t2)

$$\mathbf{RAYGSC =: \{\{:\%/2 0 (m MSC n)"0 _y\}}$$

NB. Surface engendrée par la rotation/oy de la courbe plane d'équations

NB. $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

NB. R=. (f`fp`gp) SROTC n (t1,t2) NB. $x=f(t)$ $y=g(t)$ $y'=gp(t)$

$$\mathbf{SROTC =: \{\{0 (m MSROTC n)"0 _y\}}$$

NB. Volume engendré par la rotation/oy de la surface plane limitée par la courbe

NB. d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

NB. et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. (f`gp) VOLROTC n (t1,t2)

$$\mathbf{VOLROTC =: \{\{0 (m MVROTC n)"0 _y\}}$$

NB. Moment quadratique de la surface engendrée par la rotation/oy de la

NB. courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

NB. calcul fait en divisant $[t_1,t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. (f`fp`gp) MQSROTC n (t1,t2)

$$\mathbf{MQSROTC =: \{\{2 (m MSROTC n)"0 _y\}}$$

NB. Rayon de giration/oy de la surface engendrée par la rotation/oy de la

NB. courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$)

NB. calcul fait en divisant $[t_1,t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. (f`fp`gp) RAYGSROTC n (t1 t2)

$$\mathbf{RAYGSROTC =: \{\{:\%/2 0 (m MSROTC n)"0 _y\}}$$

NB. Moment quadratique du volume engendré par la rotation/oy de la surface plane

NB. délimitée par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 <: t <: t_2$).

NB. Calcul fait en divisant $[t_1,t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. (f`gp) MQVROTC n (t1,t2)

$$\mathbf{MQVROTC =: \{\{2 (m MVROTC n)"0 _y\}}$$

NB. Rayon de giration du volume engendré par la rotation/oy de la surface plane délimitée

NB. par la courbe d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ $x'=fp(t)$ $y'=gp(t)$ ($t_1 < t < t_2$) et

NB. sa projection orthogonale sur oy

NB. Calcul fait en divisant $[t_1, t_2]$ en n sous-intervalles de même longueur

NB. R=. (f`gp) RAYGVROTC n (t1 t2)

$$\mathbf{RAYGVROTC =: \{ \% : \% / 2 \ 0 \ (m \ MVROTC \ n) \ "0 \ _ \ y \}}$$

NB. 4) Segment de droite et ligne brisée

NB. On utilise les équations paramétriques du sement de droite ab :

NB. $X=Xa + (Xb - Xa)*t$ $Y=Ya + (Yb - Ya)*t$ ($0 < t < 1$)

NB. Moment d'ordre N (nombre >: 0) par rapport à une droite prise pour axe oy

NB. du segment de droite ab défini par les affixes (za, zb) de a et b

NB. R=. N MLSEG (za, zb)

$$\mathbf{MLSEG =: | @ (-) @ | * ([f i : RE]) \% 1 + [$$

NB. Moment d'ordre N (nombre >: 0) de la surface du trapeze défini par

NB. le segment ab (affixes za, zb) et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. N MSSEG (za, zb)

$$\mathbf{MSSEG =: - @ ([: - / : IM]) * ((1 + D) f i [: RE]) \% (1 + D) * 2 + [$$

NB. Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) d'une ligne brisée

NB. R=. N MLBR z0 z1...zn (z0)

$$\mathbf{MLBR =: \{ \{ + / " 1 \ x \ MLSEG \ "0 \ 1 / (: , . , }) y \} \} \ "0 \ 1$$

NB. Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) de la surface délimitée par une ligne brisée

NB. et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. N MSLBR z0 z1 ...zn (z0)

$$\mathbf{MSLBR =: \{ \{ + / " 1 \ x \ MSSEG \ "0 \ 1 / (: , . , }) y \} \} \ "0 \ 1$$

NB. Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) de la surface engendrée par la rotation/oy

NB. d'une ligne brisée

NB. R=. N MSROTLBR z0 z1...zn (z0)

$$\mathbf{MSROTLBR =: \{ \{ 2 p 1 * (x + 1) \ MLBR \ y \} \}$$

NB. Moment/oy d'ordre N (nombre >: 0) du volume engendré par la rotation/oy

NB. d'une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. N MVROTLBR z0 z1...zn (z0)

$$\mathbf{MVROTLBR =: \{ \{ 2 p 1 * (x + 1) \ MSLBR \ y \} \}$$

NB. Longueur d'une ligne brisée

NB. R=. LONGLBR z0 z1 ... zn (z0)

$$\mathbf{LONGLBR =: 0 \ \& \ MLBR$$

NB. Surface délimitée par une ligne brisée et saprojection orthogonale sur oy

NB. R=. SURFLBR z0 z1 ... zn (z0)

SURFLBR =: 0&MSLBR

NB. Abscisse du Barycentre d'une ligne brisée

NB. R=. XGLBR z0 z1 ...zn (z0)

XGLBR =: [:%/1 0&MLBR

NB. Abscisse du barycentre de la surface délimitée par une ligne brisée et

NB. sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. XGSLBR z0 z1 ...zn (z0)

XGSLBR =: [:%/1 0&MSLBR

NB. Moment quadratique/oy d'une ligne brisée

NB. R=. MQLBR z0 z1...zn (z0)

MQLBR =: 2&MLBR

NB. Rayon de giration/oy d'une ligne brisée

NB. R=. RAYGLBR z0 z1... zn (z0)

RAYGLBR =: {{%:%/2 0&MLBR y}}

NB. Moment quadratique/oy de la surface délimitée par une ligne brisée

NB. et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. MQSLBR z0 z1 ... zn (z0)

MQSLBR =: 2&MSLBR

NB. Rayon de giration/oy de la surface délimitée par une ligne brisée

NB. et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. RAYGSLBR z0 z1... zn (z0)

RAYGSLBR =: {{%:%/2 0&MSLBR y}}

NB. Surface générée par la rotation/oy d'une ligne brisée

NB. R=. SROTLBR z0 z1... zn (z0)

SROTLBR =: 0&MSROTLBR

NB. Volume engendré par la rotation/oy de la surface délimitée par

NB. une ligne brisée et sa projecton orthogonale sur oy

NB. R=. VROTLBR z0 z1 ... zn (z0)

VROTLBR =: 0&MVROTLBR

NB. Moment quadratique/oy de la surface engendrée

NB. par la rotation/oy d'une ligne brisée

NB. R=. MQSROTLBR z0 z1...zn (z0)

MQSROTLBR =:2&MSROTLBR

NB. Rayon de giration/oy de la surface engendrée

NB. par la rotation/oy d'une ligne brisée

NB. R=. RAYGSROTLBR z0 z1... zn (z0)

$$\mathbf{RAYGSROTLBR} =: \{ \{ \% : \% / 2 \ 0 \& \mathbf{MSROTLBR} \ y \} \}$$

NB. Moment quadratique/oy du volume engendré par la rotation /oy

NB. d'une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. MQVROTLBR z0 z1... zn (z0)

$$\mathbf{MQVROTLBR} =: \mathbf{2 \& MVROTLBR}$$

NB. Rayon de giration/oy du volume engendré par la rotation /oy

NB. d'une ligne brisée et sa projection orthogonale sur oy

NB. R=. RAYGVROTLBR zo z1 ... zn (z0)

$$\mathbf{RAYGVROTLBR} =: \{ \{ \% : \% / 2 \ 0 \& \mathbf{MVROTLBR} \ y \} \}$$

IV) JUSTIFICATIONS MATHÉMATIQUES

A) Définitions

Dans ce qui suit on définit et utilise dans un plan repéré par les axes orthonormés **ox** et **oy** :

N : nombre positif ou nul (généralement entier)

n : entier supérieur ou égal à 1

Z : ensemble coplanaire de **n+1** points $Z = \{z_0 z_1 \dots z_n\}$ (z_k étant le nombre complexe $x_k + i.y_k$)

XG : abscisse d'un barycentre

C : courbe plane

A : aire plane plan

MQΔ : Moment quadratique par rapport à un axe Δ

Mt(Δ, N, objet) : moment d'ordre N par rapport à l'axe Δ d'un objet

Moment géométrique d'ordre N des points $Z = \{z_0 z_1 \dots z_n\}$ par rapport à oy :

$$Mt(oy, N, Z, p_0) = p_0 \cdot \sum_{k=0}^n x_k^N \quad (\text{si les points sont affectés du même poids } p_0)$$

$$Mt(oy, N, Z, p) = \sum_{k=0}^n p_k x_k^N \quad (\text{si les points sont affectés des poids } p = \{p_0 p_1 \dots p_n\}, \text{ nombres réels})$$

Moment géométrique d'ordre N d'une courbe plane C par rapport à oy :

$$Mt(oy, N, C) = \int_C x^N \cdot dl$$

Moment géométrique d'ordre N d'une aire plane A par rapport à oy :

$$Mt(oy, N, A) = \iint_A x^N \cdot ds$$

| Par rapport à l'axe oy | Grandeur géométrique calculée (unités MKSA) |
|---|---|
| $XG(Z) = Mt(oy, 1, Z, p) / Mt(oy, 0, Z, p)$ $MQoy(Z) = Mt(oy, 2, Z, p)$ $RAYGoy(Z) = (Mt(oy, 2, Z, p) / Mt(oy, 0, Z, p))^{1/2}$ | Abscisse du barycentre des points Z affectés des poids p (m) Moment quadratique des points Z affectés des poids p (m²) Rayon de giration/oy des points Z affectés des poids p (m) |
| $L(C) = Mt(oy, 0, C)$ $XG(C) = Mt(oy, 1, C) / Mt(oy, 0, C)$ $MQoy(C) = Mt(oy, 2, C)$ $RAYGoy(C) = (Mt(oy, 2, C) / Mt(oy, 0, C))^{1/2}$ | Longueur d'une courbe plane C (m) Abscisse du barycentre d'une courbe plane C (m) Moment quadratique d'une courbe plane C (m³) Rayon de giration/oy d'une courbe plane C (m) |
| $S(A) = Mt(oy, 0, A)$ $XG(A) = Mt(oy, 1, A) / Mt(oy, 0, A)$ $MQoy(A) = Mt(oy, 2, A)$ $RAYGoy(A) = (Mt(oy, 2, A) / Mt(oy, 0, A))^{1/2}$ | Surface d'une aire plane A (m²) Abscisse du barycentre d'une aire plane A (m) Moment quadratique d'une aire plane A (m⁴) Rayon de giration/oy d'une aire plane A (m) |
| $Soy(C) = 2\pi \cdot Mt(oy, 1, C)$ $MQoySoy(C) = 2\pi \cdot Mt(oy, 3, C)$ $RAYGSoy(C) = (Mt(oy, 3, C) / Mt(oy, 1, C))^{1/2}$ | Surface engendrée par rotation d'une courbe plane C (m²) Moment quadratique/son axe d'une surface engendrée par rotation de C (m⁴) Rayon de giration/son axe d'une surface engendrée par rotation de C (m) |
| $Voy(A) = 2\pi \cdot Mt(oy, 1, A)$ $MQoyVoy(A) = 2\pi \cdot Mt(oy, 3, A)$ $RAYGVoy(A) = (Mt(oy, 3, A) / Mt(oy, 1, A))^{1/2}$ | Volume engendré par rotation d'une aire plane A (m³) Moment quadratique/son axe d'un volume engendré par rotation de A (m⁵) Rayon de giration/son axe d'un volume engendré par rotation de A (m) |

B) Calcul des moments

Moment d'ordre N d'une courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ par rapport à oy ; $t \in [t_1, t_2]$

$$MTLoy(N, x, x', y') = \int_{t_1}^{t_2} x^N(t) dl = \int_{t_1}^{t_2} x^N(t) \cdot (x'^2(t) + y'^2(t))^{1/2} dt$$

$$MTLoy(N, x, x', y') = \int_{t_1}^{t_2} x^N(t) \cdot (x'^2(t) + y'^2(t))^{1/2} dt$$

Moment d'ordre N par rapport à oy d'une surface plane délimitée par une courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ et sa projection sur oy ; $t \in [t_1, t_2]$

$$MTSoy(N, x, y') = \iint_S x^N \cdot dx dy = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{x(t)} x^n dx \right\} dy(t) = \frac{1}{(N+1)} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x^{N+1}(t) \cdot y'(t) dt$$

$$MTSoy(N, x, y') = \frac{1}{(N+1)} \cdot \int_{t_1}^{t_2} x^{N+1}(t) \cdot y'(t) dt$$

Moment d'ordre N par rapport à oy de la surface engendrée par rotation autour de oy de la courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$; $t \in [t_1, t_2]$

$$MTSROToy(N, x, x', y') = \int_{t_1}^{t_2} x^N(t) \cdot 2\pi \cdot x(t) dl(t) = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x^{N+1}(t) dl(t)$$

$$MTSROToy(N, x, x', y') = 2\pi \cdot MTLoy(N+1, x, x', y')$$

Moment d'ordre N par rapport à oy du volume engendré par rotation autour de oy de la surface délimitée par la courbe plane d'équations $x=f(t)$ $y=g(t)$ et sa projection sur oy ; $t \in [t_1, t_2]$

$$MTVROToy(N, x, y') = \iint_S x^N \cdot 2\pi \cdot x \cdot ds = 2\pi \cdot \iint_S x^{N+1} ds = 2\pi \cdot MTSoy(N+1, x, y')$$

$$MTVROToy(N, x, y') = 2\pi \cdot MTSoy(N+1, x, y')$$

C) Principaux théorèmes

Dans ce qui suit on appellera « **poïds** » des nombres réels qui, en pratique, pourront représenter n'importe quelle grandeur (longueur, surface, volume, masse, monnaie, probabilité, charge électrique...). Ces « **poïds** » seront affectés à des points coplanaires représentés par leur affixe complexe $Z = X+i.Y$ (XjY en langage J).

Une courbe plane sera accompagnée par son barycentre affecté du « **poïds** » égal à la longueur de la courbe.

Une surface plane sera accompagnée par son barycentre affecté du « **poïds** » égal à l'aire de cette surface.

Si des points sont affectés de « **coefficients** », ceux-ci sont des nombres réels sans dimension de somme **1**.

Aux « **poids** » affectés à des points, on associe des « **coefficients** » obtenus en divisant chaque « **poids** » par la somme des « **poids** » (ce qui suppose cette somme finie et non nulle).

Th1 de décomposition

Notons **E** un objet qui est soit : un ensemble fini ou non de **points** coplanaires affectés de « **poids** » (de somme finie non nulle), soit de **courbes** planes de longueurs finies, ou d'**aires** planes de surfaces finies.

Soit (**E1, E2, ..., En**) une partition de **E** en **n** classes (donc vérifiant pour tout **i, j** $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $E_i \neq \emptyset$, $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots \cup E_n = E$ avec $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$).

p1, p2...pn les « **poids** » de **E1, E2, ...En** et **p = p1+p2+...+pn** le « **poids** » de **E**.

Soit **G** l'afixe du barycentre de **E** et **G1, G2, ..., Gn** les affixes des barycentres de **E1, E2, ...En**.

Alors :

1) Le barycentre de **E** est égal au barycentre des barycentres partiels affectés de leurs « **poids** » respectifs.

$$\mathbf{p \cdot G = p1 \cdot G1 + p2 \cdot G2 + \dots + pn \cdot Gn}$$

G est défini si et seulement si **p** est non nul.

2) Le moment quadratique de **E** par rapport à une droite **D** coplanaire est égal à la somme des moments quadratiques de **E1, E2, ...En** par rapport à cette droite **D**.

$$MQ(E, D) = MQ(E1, D) + MQ(E2, D) + \dots + MQ(En, D)$$

3) Le moment quadratique de **E** par rapport à un point **o** coplanaire est égal à la somme des moments quadratiques de **E1, E2, ...En** par rapport à ce point **o**.

$$MQ(E, o) = MQ(E1, o) + MQ(E2, o) + \dots + MQ(En, o)$$

Démonstrations :

$$\mathbf{p \cdot G = \sum_{X \in E} p_x \cdot X = \sum_{i=1}^n \sum_{X \in E_i} p_x \cdot X = \sum_{i=1}^n p_i \cdot G_i} \quad \text{cqfd}$$

$$MQ(E, D) = \sum_{x \in E} MQ(x, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in E_i} MQ(x, D) = \sum_{i=1}^n MQ(E_i, D) \quad \text{cqfd}$$

$$MQ(E, o) = \sum_{x \in E} MQ(x, o) = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in E_i} MQ(x, o) = \sum_{i=1}^n MQ(E_i, o) \quad \text{cqfd}$$

Th2 de GULDIN :

La surface engendrée par la rotation d'une courbe plane finie autour d'une droite **D** coplanaire qui ne la coupe pas, est égale au produit de la longueur **L** de cette courbe par celle de la circonférence décrite par son barycentre.

$$S_{rot} = 2\pi r L$$

Démonstration : soit **r** la distance de ce barycentre et la droite **D** (prise comme axe **oy**)

$$S = \int_C 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl = 2 \cdot \pi \cdot \int_C x \cdot dl = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad \text{cqfd}$$

Th3 de GULDIN :

Le volume engendré par la rotation d'une aire plane finie **A** autour d'une droite **D** coplanaire qui ne la coupe pas, est égal au produit de la valeur **S** de sa surface par la longueur de la circonférence décrite par son barycentre.

$$V_{rot}=2\pi rS \quad \text{où } r = \text{distance du barycentre à } D$$

Démonstration : soit r la distance du barycentre et la droite **D** (prise pour axe oy)

$$V = \iint_A 2 \cdot \pi \cdot x \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot \iint_A x \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot S \quad \text{cqfd}$$

TH4 de HUYGHENS :

Le moment quadratique d'un ensemble plan **E** de points, affectés de « **poïds** » de somme **p** non nulle, par rapport à une droite **D** coplanaire est égal au moment quadratique par rapport à la droite **DG** parallèle à **D** passant par leur barycentre **G**, augmenté du moment quadratique par rapport à **D** de ce barycentre affecté de la somme de leurs « **poïds** ».

$$MQ(E,D) = MQ(E,DG) + d^2 \cdot p \quad \text{où } d = \text{distance de } D \text{ à } DG$$

Remarque : Quand la somme des « **poïds** » est nulle le barycentre n'est pas défini.

Démonstration : on utilise 2 systèmes d'axes ox,oy et OX,OY où oy est **D** et OY est **DG** ; n est le nombre de points (éventuellement infini dénombrable)

$$MQ(E,D) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (X_i + d)_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i^2 + 2 \cdot d \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot X_i + d^2 \cdot \sum_{i=1}^n p_i = MQ(E,DG) + d^2 \cdot p$$

cqfd

TH5 de HUYGHENS :

Le moment quadratique d'une courbe plane **C** par rapport à une droite **D** coplanaire est égal au moment quadratique par rapport à la droite **DG** parallèle à **D** passant par son barycentre **G**, augmenté du moment quadratique par rapport à **D** de ce barycentre affecté du « **poïds** » égal à la longueur **L** de cette courbe.

$$MQ(C,D) = MQ(C,DG) + d^2 \cdot L \quad \text{où } d = \text{distance de } D \text{ à } DG$$

Démonstration : on utilise 2 systèmes d'axes ox,oy et OX,OY où oy est **D** et OY est **DG**

$$MQ(C,D) = \int_C x^2 \cdot dl = \int_C (X+d)^2 \cdot dl = \int_C X^2 \cdot dl + 2 \cdot d \cdot \int_C X \cdot dl + d^2 \cdot \int_C dl = MQ(C,DG) + d^2 \cdot L \quad \text{cqfd}$$

Remarque : $\int_C X \cdot dl = X_G \cdot L = 0$ (car OY passe par **G** impliquant $X_G = 0$)

TH6 de HUYGHENS :

Le moment quadratique d'une aire plane **A** par rapport à une droite **D** coplanaire est égal au moment quadratique de **A** par rapport à la droite **DG** parallèle à **D** passant par son barycentre **G**, augmenté du moment quadratique par rapport à **D** de ce barycentre affecté du « **poïds** » égal à la surface **S** de cette aire.

$$MQ(A,D) = MQ(A,DG) + d^2 \cdot S \quad \text{où } d = \text{distance de } D \text{ à } DG$$

Démonstration : on utilise 2 systèmes d'axes ox,oy et OX,OY où oy est D et OY est DG

$$MQ(A, D) = \iint_A x^2 \cdot ds = \iint_A (X+d)^2 \cdot ds = \iint_A X^2 \cdot ds + 2 \cdot d \cdot \iint_A X \cdot ds + d^2 \cdot \iint_A ds = MQ(A, DG) + d^2 \cdot S$$

cqfd

Remarque : $\iint_C X \cdot ds = X_G \cdot S = 0$ (car OY passe par G impliquant $X_G = 0$)

TH7 de HUYGHENS :

Le moment quadratique d'un ensemble plan **E** de points, affectés de « **poïds** » de somme **p** non nulle, par rapport à un point **o** coplanaire est égal au moment quadratique par rapport au barycentre **G**, augmenté du moment quadratique par rapport à **o** de ce barycentre affecté de la somme de leurs « **poïds** ».

$$MQ(E, o) = MQ(E, G) + d^2 \cdot p \quad \text{où } d = |oG|$$

Remarque : Quand la somme des « **poïds** » est nulle le barycentre n'est pas défini.

Démonstration : n est le nombre de points (éventuellement infini dénombrable) $m_i \quad i=1 \dots n$

$$MQ(E, o) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (o\vec{m}_i)^2 = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (o\vec{G} + G\vec{m}_i)^2 = \sum_{i=1}^n p_i \cdot o\vec{G}^2 + 2 \cdot o\vec{G} \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot G\vec{m}_i + d^2 \cdot \sum_{i=1}^n p_i$$

$$= MQ(E, G) + d^2 \quad \text{cqfd}$$

TH8 de HUYGHENS :

Le moment quadratique d'une courbe plane **C** par rapport à un point **o** coplanaire est égal au moment quadratique par rapport au barycentre **G**, augmenté du moment quadratique par rapport à **o** de ce barycentre **G** affecté du « **poïds** » égal à la longueur **L** de cette courbe.

$$MQ(C, D) = MQ(C, DG) + d^2 \cdot L \quad \text{où } d = \text{distance de } o \text{ à } G$$

Démonstration : on utilise les coordonnées polaires r, θ d'un point **m** variable de la courbe

$$Mo(C, o) = \int_C r^2 \cdot dl = \int_C (o\vec{G} + G\vec{m})^2 \cdot dl = \int_C Gm^2 \cdot dl + 2 \cdot o\vec{G} \cdot \int_C G\vec{m} \cdot dl + o\vec{G}^2 \cdot \int_C dl = MQ(C, G) + d^2 \cdot L$$

cqfd

Remarque : $\int_C X \cdot dl = X_G \cdot L = 0$ (car OY passe par G impliquant $X_G = 0$)

TH9 de HUYGHENS :

Le moment quadratique d'une aire plane **A** par rapport à un point **o** coplanaire est égal au moment quadratique de **A** par rapport au barycentre **G**, augmenté du moment quadratique par rapport à **o** de ce barycentre affecté du « **poïds** » égal à la surface **S** de cette aire.

$$MQ(A, o) = MQ(A, G) + d^2 \cdot S \quad \text{où } d = \text{distance de } o \text{ à } G$$

Démonstration :

$$MQ(A, o) = \iint_A r^2 \cdot ds = \iint_A (o\vec{G} + g\vec{m})^2 \cdot ds = \iint_A Gm^2 \cdot ds + 2 \cdot o\vec{G} \cdot \iint_A G\vec{m} \cdot ds + o\vec{G}^2 \cdot \iint_A ds$$

$$= MQ(A, G) + d^2 \cdot S \quad \text{cqfd}$$

Remarque : $\iint_C G\vec{m} \cdot ds = 0$ (par définition du barycentre)

TH10 : Le moment quadratique d'un ensemble E de points coplanaires, d'une courbe plane C ou d'une surface plane S par rapport à un point o du plan est égal à la somme de leurs moments quadratiques par rapport à 2 droites orthogonales de leur plan issues de o notées ox et oy.

$$\begin{aligned} MQ(E,o) &= MQ(E,ox) + MQ(E,oy) \\ MQ(C,o) &= MQ(C,ox) + MQ(C,oy) \\ MQ(S,o) &= MQ(S,ox) + MQ(S,oy) \end{aligned}$$

Démonstrations : soit $p_0 p_1 \dots p_n$ les « poids » des points $A_1 A_2 \dots A_n$ de E

$$MQ(E, o) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot \overrightarrow{oA_i}^2 = \sum_{i=0}^n p_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x_i^2 + \sum_{i=0}^n p_i \cdot y_i^2 = MQ(E, ox) + MQ(E, oy) \quad \text{cqfd}$$

soit A (x,y) un point décrivant la courbe C

$$MQ(C, o) = \int_C \overrightarrow{oA}^2 dl = \int_C x^2 \cdot dl + \int_C y^2 \cdot dl = MQ(C, ox) + MQ(C, oy) \quad \text{cqfd}$$

soit A(x,y) un point balayant la surface S

$$MQ(S, o) = \iint_S \overrightarrow{oA}^2 ds = \iint_S x^2 \cdot ds + \iint_S y^2 \cdot ds = MQ(S, ox) + MQ(S, oy) \quad \text{cqfd}$$

d) Fonction $fi_N(a,b)$

L'expression remarquable (où a et b sont réels ou complexes et n entier positif ou nul)

$$fi_n(a, b) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 \dots a^2 \cdot b^{n-2} + a \cdot b^{n-1} + b^n$$

prend la valeur limite $(n+1)a^n$ quand b tend vers a .

Elle est informatiquement d'une utilisation délicate sous sa forme de quotient mais sans difficulté sous sa forme développée.

On a $fi_0(a, b) = 1$, $fi_1(a, b) = a + b$, $fi_2(a, b) = a^2 + a \cdot b + b^2$...

Propriétés (symétrie et relation de récurrence) :

$$fi_n(a, b) = fi_n(b, a) \quad \text{et} \quad fi_{n+1}(a, b) = a^{n+1} + b \cdot fi_n(a, b) = b^{n+1} + a \cdot fi_n(a, b)$$

e) Cas d'un segment de droite AB

Un segment de droite AB (affixes des extrémités $ZA = XA + iYA$ et $ZB = XB + iYB$) a pour

équations : $x(t) = XA + (XB - XA) \cdot t$ $y(t) = YA + (YB - YA) \cdot t$ avec $0 \leq t \leq 1$

$$x'(t) = XB - XA$$

$$y'(t) = YB - YA$$

$$dl(t) = |ZB - ZA| dt$$

Moment/oy d'ordre N (entier positif ou nul) du segment AB

$$MLSEG(N, AB) = \oint_{t=0}^1 x^N(t) dl(t) = |ZB - ZA| \cdot \int_0^1 (XA + (XB - XA)t)^N dt$$

$$MLSEG(N, AB) = \frac{|ZB - ZA|}{(N+1)(XB - XA)} \left[(XA + (XB - XA)t)^{N+1} \right]_0^1 = \frac{|ZA - ZB|}{(N+1)} \cdot \frac{(XA^{N+1} - XB^{N+1})}{(XA - XB)}$$

$$MLSEG(N, AB) = \frac{|ZA - ZB|}{(N+1)} fi_N(XA, XB)$$

Moment/oy d'ordre N (entier positif ou nul) de la surface plane délimitée par un segment de droite AB et sa projection orthogonale sur oy

$$MSSEG(N, AB) = \iint_S x^N ds = \int_0^1 \left\{ \int_0^{x(t)} x^N dx \right\} y'(t) dt = \frac{(YB - YA)}{(N+1)} \int_0^1 x^{N+1}(t) dt$$

$$MSSEG(N, AB) = \frac{(YB - YA)}{(N+1)} \int_0^1 (XA + (XB - XA)t)^{N+1} dt = \frac{(YB - YA)}{(N+1)} \left[\frac{(XA + (XB - XA)t)^{N+2}}{(N+2) \cdot (XB - XA)} \right]_0^1$$

$$MSSEG(N, AB) = \frac{(YB - YA)}{(N+1) \cdot (N+2)} \left(\frac{XB^{N+2} - XA^{N+2}}{XB - XA} \right)$$

$$MSSEG(N, AB) = \frac{(YB - YA)}{(N+1) \cdot (N+2)} fi_{N+1}(XA, XB)$$

V) QUELQUES APPLICATIONS

a) Abscisse du barycentre d'une demi-circonférence

On considère la demi-circonférence centrée en o de rayon r avec $x \geq 0$

$$L = \pi \cdot r$$

NB. Longueur de la demi-circonférence

$$S = 4 \pi \cdot r^2$$

NB. Surface de la sphère obtenue par rotation/oy

Le Th2 de Guldin permet d'écrire : $S = L \cdot 2\pi \cdot X_{GL} \Rightarrow X_{GL} = (2/\pi) \cdot r$

Si $r=2$ on obtient $X_{GL} = 4/\pi$

$$4p_1$$

NB. En J

1.273239544735163

NB. Valeur de X_{GL}

Appliquons l'adverbe XGLC avec 100 sous-intervalles de $[-\pi/2, +\pi/2]$:

$$(\{2*2 \text{ o.y}\} \setminus \{-2*1 \text{ o.y}\} \setminus \{2*2 \text{ o.y}\}) \text{ XGLC } 100 \text{ } (_1r2p1 \ 1r2p1)$$

1.273239544735163

NB. Confirmation !

b) Abscisse du barycentre de la surface d'un demi-cercle

On considère le demi-cercle centré en o de rayon r avec $x \geq 0$

$$S = \pi \cdot r^2 / 2$$

NB. Surface du demi-cercle

$$V = 4\pi \cdot r^3 / 3$$

NB. Volume de la sphère obtenue par rotation/oy

Le Th3 de Guldin permet d'écrire : $V = S \cdot 2\pi \cdot X_{GS} \Rightarrow X_{GS} = (4/3\pi) \cdot r$

Si $r=2$ on obtient $X_{GS} = 8/3\pi$

$$8r3p_1$$

NB. En j

0.8488263631567752

NB. Valeur de X_{GS}

En utilisant l'adverbe XGSC avec 100 sous-intervalles de $[-\pi/2, +\pi/2]$:

$$(\{2*2 \text{ o.y}\} \setminus \{2*2 \text{ o.y}\}) \text{ XGSC } 100 \text{ } (_1r2p1 \ 1r2p1)$$

0.8488263631567751

NB. Confirmation !

c) Volume d'un tronc de cône (rayons $r_2 > r_1$ hauteur H)

C'est la différence des volumes d'un grand cône ($\pi \cdot r_2^2 \cdot H_2 / 3$) et d'un petit ($\pi \cdot r_1^2 \cdot H_1 / 3$)

vérifiant $\frac{H_2}{r_2} = \frac{H_1}{r_1} = \frac{H}{r_2 - r_1} \Rightarrow H_2 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} H$ et $H_1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1} H$ d'où :

$$V = \frac{\pi}{3} r_2^2 \cdot H_2 - \frac{\pi}{3} r_1^2 \cdot H_1 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{r_2^3}{r_2 - r_1} \cdot H - \frac{r_1^3}{r_2 - r_1} \cdot H \right) = \left(\frac{\pi H}{3} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} \Rightarrow V = \left(\frac{\pi H}{3} \right) \cdot (r_2^2 + r_1 \cdot r_2 + r_1^2)$$

Si $H=5$, $r_1=2$ et $r_2=4$ on a $V = (\pi \cdot 5/3)(16+8+4) = (140/3)\pi$ soit en J :

$$140r3p1$$

NB. En j

146.6076571675237

NB. Valeur du volume du tronc de cône

En utilisant le verbe VROTLBR et le segment d'extrémités 4j0 et 2j5 il vient :

$$\text{VROTLBR } 4j0 \ 2j5$$

NB. Calcul en J

146.6076571675236

NB. Confirmation !

d) **La cycloïde** obtenue en faisant rouler, sans glisser, une circonférence de rayon r sur oy en partant de o admet comme équations paramétriques où t est l'angle de rotation ($0 \leq t \leq 2\pi$) :

$$X(t)=f(t)=r(1-\cos(t))=2r.\sin^2(t/2) \quad \text{Equations connues par Pascal, Fermat}$$

$$Y(t)=g(t)=r(t-\sin(t)) \quad \text{et Descartes}$$

$$X'(t)=fp(t)=r.\sin(t)$$

Mais ils ne connaissaient pas

$$Y'(t)=gp(t)=X(t)$$

les dérivées ... ni les primitives

Blaise Pascal a travaillé pendant 7 ans pour calculer la longueur, la surface d'une arche de cycloïde, puis la surface et le volume du solide obtenu par rotation de cette arche autour de oy .

En J:

Supposons $r=2$

Equations de la cycloïde :

Tracé d'une arche de cycloïde

(f`g) PLOTLC 100 (0 2p1)

$$f =: \{2*1-2 \text{ o.y}\} \quad \text{NB. } x(t)=f(t)$$

$$g =: \{2*y-1 \text{ o.y}\} \quad \text{NB. } y(t)=g(t)$$

$$fp =: \{2*1 \text{ o.y}\} \quad \text{NB. } x'(t)=fp(t)$$

$$gp =: \{2*1-2 \text{ o.y}\}$$

$$\text{NB. } y'(t)=gp(t)=f(t)=x(t)$$

$$\text{MAX}(Y)=2\pi r=4\pi \quad \text{pour } X=0$$

$$t=2\pi$$

$$\text{Point à tg verticale } X=4 \quad Y=2\pi$$

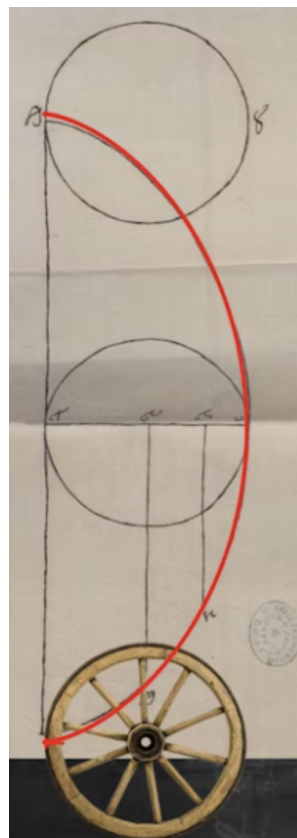
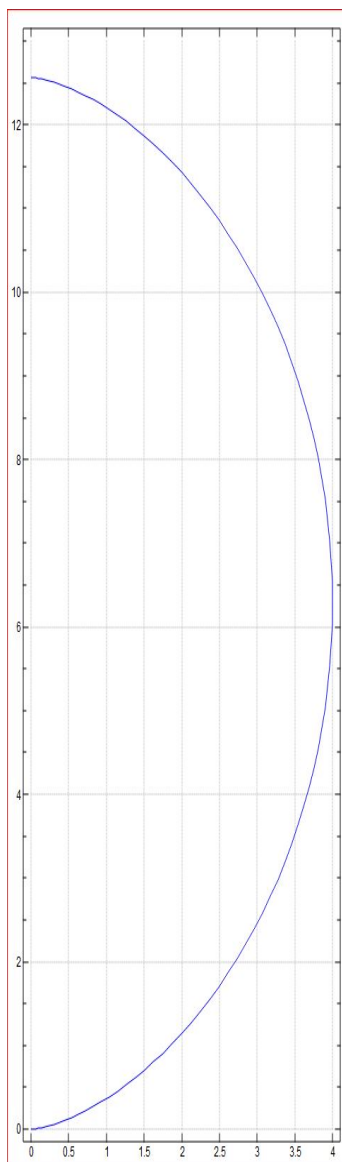
$$\text{pour } t=\pi$$

$$\text{Symétrie/droite } Y=4\pi$$

$$dl=(X'^2(t)+Y'^2(t))^{1/2}dt$$

$$= r.(2(1-\cos(t)))^{1/2}dt$$

$$\Rightarrow dl=2r.\sin(t/2)dt$$



1) Longueur d'une arche de cycloïde

$$L = \int_0^{2\pi} dl = 2 \int_0^{\pi} 2r.\sin(t/2) dt = 4r[-2\cos(t/2)]_0^{\pi} = 8r \quad \mathbf{L=8r}$$

Si $r=2$, on trouve donc $L=16$

En utilisant la conjonction **LONGC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** :

(f ` fp ` gp) LONGC 100 (0 2p1)

16 NB. Confirmation !

2) Surface de l'arche de cycloïde

$$S = \iint_A dx dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{x(t)} dx \right\} dy(t) = 2 \int_0^{\pi} \{ r(1 - \cos(t)) \} \cdot dy(t) = 2r \int_0^{\pi} 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) 2r \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8r^2 \int_0^{\pi} \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$S = 16r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(u) du \quad \text{chgt de variable } z = \sin^2(u); \quad dz = 2\sin(u)\cos(u)du \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$S = 16r^2 \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2z^{1/2}(1-z)^{1/2}} \right) dz = 8r^2 \int_0^1 z^{\frac{5}{2}-1} \cdot (1-z)^{\frac{1}{2}-1} = 8r^2 \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8r^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 8r^2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \pi = 3\pi \cdot r^2$$

S=3πr² (3 fois la surface du cercle)

Si $r=2$ on trouve **S=12π**, soit, en J :

12p1

NB. En J

37.69911184307752

NB. Surface d'une arche de cycloïde ($r=2$)

En utilisant la conjonction **SURFC** on obtient :

(f ` gp) SURFC 100 (0 2p1)

37.6991118430775

NB. Confirmation !

3) Surface du solide généré par rotation/oy d'une arche de cycloïde

$$S_{rot} = \int_0^{2\pi} 2\pi x(t) dl(t) = 4\pi \int_0^{\pi} x(t) dl(t) = 16\pi r^2 \int_0^{\pi} 2r \cdot \sin^2(t/2) \cdot 2r \cdot \sin(t/2) dt$$

$$S_{rot} = 16\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^3(t/2) dt = 32\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3(z) dz \quad \text{on pose } u = \sin^2(z) \quad 0 \leq u \leq 1$$
$$du = 2\sin(z)\cos(z) dz$$

$$S_{rot} = 32\pi r^2 \int_0^1 \left(\frac{u^{3/2}}{2u^{1/2} \cdot (1-u)^{1/2}} \right) du = 16\pi r^2 \int_0^1 u^{2-1} \cdot (1-u)^{1/2-1} du = 16\pi r^2 \beta(2, 1/2)$$

$$S_{rot} = 16\pi r^2 \cdot \Gamma(2) \cdot \Gamma(1/2) / \Gamma(5/2) = 16\pi r^2 \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2)} = \frac{64\pi}{3} r^2 \quad S_{rot} = \frac{64\pi}{3} r^2$$

Si $r=2$ on obtient **256π/3**

256r3p1

NB. En J

268.082573106329

NB. Surface du solide engendré par rotation/oy

Utilisation de la conjonction **SROTC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]**

(f`fp`gp) SROTC 100 (0 2p1)

268.0825731063289

NB. Confirmation !

4) Volume du solide généré par rotation/oy d'une arche de cycloïde

$$V_{rot} = \iint_A 2\pi x \cdot dx dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{x(t)} x dx \right\} y'(t) dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{x^2(t)}{2} \right) x'(t) dt = 4\pi \int_0^{\pi} x^3(t) dt$$

$$V_{rot} = 16\pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^6(t/2) dt = 32\pi r^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6(z) dz \quad \text{on pose} \quad u = \sin^2(z) \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$du = 2 \sin(z) \cos(z) dz$$

$$V_{rot} = 32\pi r^3 \int_0^1 \left(\frac{u^3}{2u^{1/2} \cdot (1-u)^{1/2}} \right) du = 16\pi r^3 \int_0^1 u^{7/2-1} \cdot (1-u)^{1/2-1} du = 16\pi r^3 \beta(7/2, 1/2)$$

$$V_{rot} = 16\pi r^3 \frac{\Gamma(7/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(4)} = 16\pi r^3 \frac{5.3.1}{2.2.2} \cdot \frac{\pi}{3.2} = 5\pi^2 r^3 \quad V_{rot} = 5\pi^2 r^3$$

Si r=2 on obtient **Vrot=40π²**

40p2

NB. En J

394.7841760435743

NB. Valeur du volume du solide

En utilisant la conjonction **VOLROTC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]**

(f`gp) **VOLROTC 100 (0 2p1)**

394.7841760435742

NB. Confirmation !

Remarque : Pascal travailla effectivement 7 ans pour calculer ces 4 valeurs. Evidemment il ne faisait pas que cela. Il faut aussi préciser qu'il ne disposait pas du **calcul différentiel et intégral** développé ultérieurement par **Newton** et **Leibnitz**, lesquels se sont inspirés des **travaux de Pascal sur la cycloïde**, travaux qu'ils ont amplement généralisés... indépendamment, chacun chez soi.

5) Abscisse du barycentre de la courbe d'une arche de cycloïde

Le **Th2 de Guldin** permet d'écrire :

$$S_{rot} = 2\pi X_{gc} \cdot L \Rightarrow X_{gc} = S_{rot} / (2\pi \cdot L) = 64\pi r^2 / (3.2\pi \cdot 8r) = 4r/3 \quad X_{gc} = 4r/3$$

Si r=2 on obtient **Xgc=8/3**

8%3

NB. En j

2.666666666666667

NB. Valeur de Xgl

En utilisant **XGLC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]**

(f`fp`gp) **XGLC 100 (0 2p1)**

2.666666666666667

NB. Confirmation !

6) Abscisse du barycentre de la surface d'une arche de cycloïde

Le **Th3 de Guldin** permet d'écrire :

$$V_{rot} = 2\pi X_{gs} \cdot S \Rightarrow X_{gs} = V_{rot} / (2\pi \cdot S) = 5\pi^2 r^3 / (2\pi \cdot 3\pi r^2) \quad X_{gs} = 5r/6$$

Si r=2 on obtient **Xgs=5/3**

5%3
1.666666666666667

NB. En j
NB. Valeur de Xgs

En utilisant XGSC avec 100 divisions de l'intervalle [0 2π]

(f ` gp) XGSC 100 (0 2p1)

1.666666666666667

NB. Confirmation !

7) Moment quadratique de la courbe d'une arche de cycloïde

$$M_{qc} = \int_0^{2\pi} x^2(t) dl(t) = 8r^3 \int_0^{2\pi} \sin^5(t/2) dt = 16r^3 \int_0^{\pi} \sin^5(t/2) dt = 32r^3 \int_0^{\pi/2} \sin^5(z) dz$$

On pose $u = \sin^2(z) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad du = 2 \sin(z) \cos(z) dz$

$$M_{qc} = 32r^3 \int_0^1 \left(\frac{u^{5/2}}{2 \cdot u^{1/2} \cdot (1-u)^{1/2}} \right) du = 16r^3 \int_0^1 u^2 \cdot (1-u)^{1/2-1} du = 16r^3 \beta(3, 1/2)$$

$$M_{qc} = 16r^3 \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(7/2)} = 16r^3 \left(\frac{2 \cdot \Gamma(1/2)}{\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1/2)} \right) = \left(\frac{256}{15}\right) \cdot r^3 \quad M_{qc} = (256/15)r^3$$

Si r=2 on obtient $M_{qc} = 2048/15$

2048%15
136.53333333333333

NB. En j
NB. Valeur de Mqc

En utilisant la conjonction MQLC avec 100 divisions de l'intervalle [0 2π]

(f ` fp ` gp) MQLC 100 (0 2p1)

136.53333333333333

NB. Confirmation !

8) Moment quadratique de la surface d'une arche de cycloïde

$$M_{qs} = \iint_A x^2 ds = \oint_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{x(t)} x^2 dx \right\} dy(t) = (2/3) \int_0^{2\pi} x^4(t) dt = (32/3)r^4 \int_0^{\pi} \sin^8(t/2) dt$$

$M_{qs} = (64/3)r^4 \int_0^{\pi} \sin^8(z) dz$ On pose $u = \sin^2(z) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad du = 2 \sin(z) \cos(z) dz$

$$M_{qs} = (64/3)r^4 \int_0^1 \left(\frac{u^4}{2 \cdot u^{1/2} \cdot (1-u)^{1/2}} \right) du = (32/3)r^4 \int_0^1 u^{9/2-1} \cdot (1-u)^{1/2-1} du = (32/3)r^4 \beta(9/2, 1/2)$$

$$M_{qs} = (32/3)r^4 \left(\frac{\Gamma(9/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(5)} \right) = \left(\frac{32}{3}\right)r^4 \left(\frac{\left(\frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \pi}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \Rightarrow M_{qs} = (35/12)\pi r^4$$

Si r=2 on obtient $M_{qs} = 140\pi/3$

140r3p1
146.6076571675237

NB. En J
NB. Valeur de Mqs

En utilisant la conjonction **MQSC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** il vient :

(f ` gp) MQSC 100 (0 2p1)

146.6076571675236

NB. Confirmation !

9) Rayon de giration de la courbe d'une arche de cycloïde

D'après la définition, on peut écrire :

$$\mathbf{Rglc}^2 = \mathbf{Mqc/L} = (256/15)r^3/(8r) = (32/15)r^2 \Rightarrow \mathbf{Rglc} = (32/15)^{1/2}r$$

Si $r=2$ on obtient $\mathbf{Rglc} = (128/15)^{1/2}$

%: 128r15

NB. En J

2.921186973360886

NB. Valeur de Rglc

En utilisant la conjonction **RAYGC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** on obtient

(f ` fp ` gp) RAYGC 100 (0 2p1)

2.921186973360886

NB. Confirmation !

10) Rayon de giration de la surface d'une arche de cycloïde

D'après la définition, on peut écrire :

$$\mathbf{Rgsc}^2 = \mathbf{Mqs/S} = (35/12)\pi r^4/3\pi r^2 = (35/36)r^2 \Rightarrow \mathbf{Rgsc} = (35/36)^{1/2}r$$

Si $r=2$ on obtient $\mathbf{Rgsc} = (35/9)^{1/2}$

%: 35r9

NB. En J

1.972026594366539

NB. Valeur de Rgsc

En utilisant la conjonction **RAYGSC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** on obtient

(f ` gp) RAYGSC 100 (0 2p1)

1.972026594366539

NB. Confirmation !

11) Moment quadratique/oy de la surface du solide généré par rotation/oy d'une arche de cycloïde

$$\mathbf{Mqsrot} = \int_0^{2\pi} x^2(t) 2\pi \cdot x(t) dl(t) = 2\pi \int_0^{2\pi} r^3 \sin^6(t/2) \cdot 2r \cdot \sin(t/2) dt = 64\pi r^4 \int_0^{\pi} \sin^7(t/2) dt$$

$$\mathbf{Mqsrot} = 128\pi r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^7(z) dz \quad \text{On pose} \quad u = \sin^2(z) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad du = 2\sin(z)\cos(z) dz$$

$$\mathbf{Mqsrot} = 128\pi r^4 \int_0^1 \left(\frac{u^{7/2}}{2 \cdot u^{1/2} \cdot (1-u)^{1/2}} \right) du = 64\pi r^4 \int_0^1 u^{4-1} \cdot (1-u)^{1/2-1} du = 64\pi r^4 \beta(4, 1/2)$$

$$\mathbf{Mqsrot} = 64\pi r^4 \left(\frac{\Gamma(4) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(9/2)} \right) = 64\pi r^4 \left(\frac{6 \cdot \Gamma(1/2)}{\left(\frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1/2)} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Mqsrot} = (2048/35) \pi r^4$$

Si $r=2$ on obtient $\mathbf{Mqsrot} = 32768\pi/35$

32768r35p1

NB. En J

2941.248802080867

NB. Valeur de Mqsrot

En utilisant la conjonction **MQSROTC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** on obtient

(f ` fp ` gp) MQSROTC 100 (0 2p1)

2941.248802080866

NB. Confirmation !

12) Moment quadratique/oy du volume du solide généré par rotation/oy d'une arche de cycloïde

$$M_{qvrot} = \iint_A x^2 dv = \iint_A x^2 2\pi x dx dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{x(t)} x^3 dx \right\} 2\pi dy(t) = (\pi/2) \int_0^{2\pi} x^5(t) dt$$

$$M_{qvrot} = 32\pi r^5 \int_0^{\pi} \sin^{10}(t/2) dt = 64\pi r^5 \int_0^{\pi/2} \sin^{10}(z) dz \quad u = \sin^2(z) \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$du = 2 \sin(z) \cos(z) dz$$

$$M_{qvrot} = 64\pi r^5 \int_0^1 \left(\frac{u^5}{2 \cdot u^{1/2} \cdot (1-u)^{1/2}} \right) du = 32\pi r^5 \int_0^1 u^{11/2-1} \cdot (1-u)^{1/2-1} du = 32\pi r^5 \beta(11/2, 1/2)$$

$$M_{qvrot} = 32\pi r^5 \left(\frac{\Gamma(11/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(6)} \right) = 32\pi r^5 \left(\frac{(\frac{9}{2}) \cdot (\frac{7}{2}) \cdot (\frac{5}{2}) \cdot (\frac{3}{2}) \cdot (\frac{1}{2})}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \right) \pi \Rightarrow M_{qvrot} = 63\pi^2 r^5 / 8$$

Si **r=2** on obtient **Mqvrot = 252π²**

252p2

NB. En J

2487.140309074518

NB. Valeur de Mqvrot

En utilisant la conjonction **MQSROTC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** on obtient

(f ` gp) MQVROTC 100 (0 2p1)

2487.140309074518

NB. Confirmation !

13) Rayon de giration/oy de la surface du solide généré par rotation/oy d'une arche de cycloïde

Par définition on peut écrire :

$$R_{gsrot}^2 = M_{qsrot} / S_{rot} = (2048/35)\pi r^4 / (64\pi r^2 / 3) = (35/36)r^2 \Rightarrow R_{gsrot} = (35/36)^{1/2} r$$

Si **r=2** on obtient **Rgsrot=(35/9)^{1/2}**

%.35r9

NB. En J

1.972026594366539

NB. Valeur de Rgsrot

En utilisant la conjonction **RAYGSC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** il vient :

(f ` gp) RAYGSC 100 (0 2p1)

1.972026594366539

NB. Confirmation !

14) Rayon de giration/oy du volume du solide généré par rotation/oy d'une arche de cycloïde

Par définition on peut écrire :

$$R_{gvrot}^2 = M_{qvrot}/V_{rot} = (63\pi^2 r^5/8)/(5\pi^2 r^3) = (63/40)r^2 \Rightarrow R_{gvrot} = (63/40)^{1/2} r$$

Si $r=2$ on obtient $R_{gvrot} = (63/10)^{1/2}$

#:63r10

2.509980079602227

NB. En J

NB. Valeur de Rgvrot

En utilisant la conjonction **RAYGVROTC** avec **100** divisions de l'intervalle **[0 2π]** il vient :

(f`gp) RAYGVROTC 100 (0 2p1)

2.509980079602227

NB. Confirmation !

Les calculs précédents, qui complètent ceux, géniaux, de Pascal sur la cycloïde (nommée « roulette » par lui), bénéficient, outre du langage J, des méthodes modernes du calcul différentiel et intégral. Ces méthodes, issues des travaux de Pascal sur la cycloïde (eux-mêmes inspirés par ceux, peu rigoureux, de Roberval), ont été généralisées indépendamment et simultanément par Newton et Leibnitz, puis affinées par Euler, Gauss, Lagrange, Laplace, Tchebychev, Legendre, Cauchy, Riemann, Poincaré, Borel, Lebesgue... et de nombreux autres mathématiciens.

e) Masse, moment d'inertie et rayon de giration d'un solide de révolution/oy

Solide obtenu par rotation/oy de la courbe composite plane fermée qui suit.

Dimensions en cm. Matériau : acier (masse volumique : 7850 kg/m³)

Affixes des points (51 points par 1/2 circonférences)

'ZA ZB ZC'=. 1 3 5 j. 0 1 1

'ZD ZE ZF'=. 5 3 3 j. 2 2 4

'ZG ZH ZI'=. 7 7 5 j. 4 5 5

'ZJ ZK ZL'=. 5 7 7 j. 7 7 8

'ZM ZN'=. 3 1 j. 8 9

'ZP ZQ'=. 0.5 j. 9 0

ANG =. 50 sint _1r2p1 1r2p1

PC=. 0.5*^j. ANG NB. 1/2 circonférence centrée en o

PCD=. 5j1.5+PC NB. 1/2 circonférence diam CD

PGH=. 7j4.5+PC NB. 1/2 circonférence diam GH

PKL=. 7j7.5+PC NB. 1/2 circonférence diam KL

Z1=. ZA,ZB,PCD

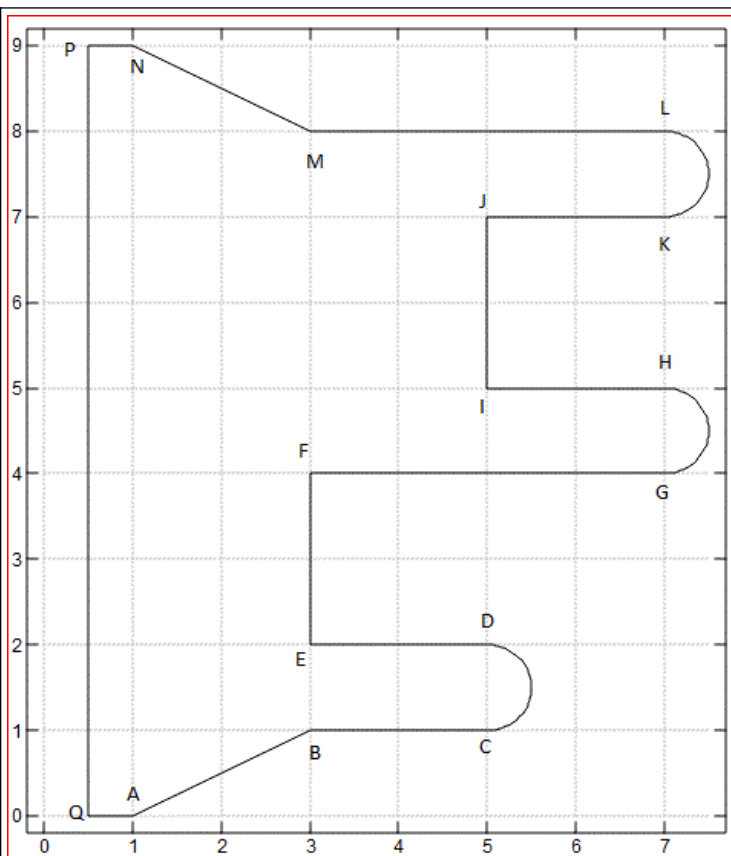
Z2=. ZE,ZF,PGH

Z3=. ZI,ZJ,PKL

Z4=. ZM,ZN,ZP,ZQ,ZA

ZZ=. Z1,Z2,Z3,Z4

ZZ : vecteur d'affixes de points définissant la courbe composite ci-contre



[VOL=. VROTLBR ZZ

NB. Volume

668.622

NB. En cm³

[MQ=. MQVROTLBR ZZ

NB. Moment quadratique

13019.5

[MASSE=. VOL*1e_6 *7850

5.24868

[RG=. RAYGVROTLBR ZZ

4.41273

[MI=. MASSE**RG*1e_2

0.0102203

[MI=. MQ*1e_10*7850

0.0102203

NB. En cm⁵

NB. Masse

NB. En kg

NB. Rayon de giration

NB. En cm

NB. Moment d'inertie/oy

NB. En kg.m²

NB. Idem

f) Etude d'un tore

Solide généré par la rotation/oy d'un cercle de rayon **r**, et **R**= distance du centre à oy

Calculs de sa **surface**, de son **volume**, de leurs **moments quadratiques** et **rayons de giration** par rapport à oy.

En J on supposera (en cm):

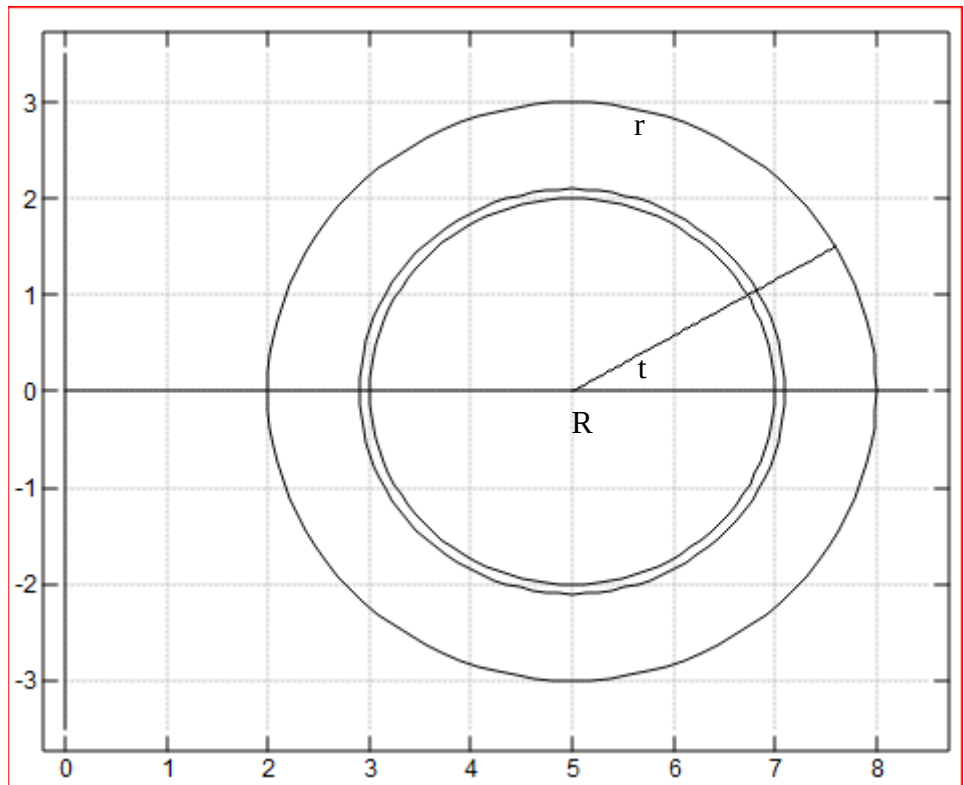
R=.5 [r=.3

f=:{{5+3*2 o.y}}

g=:{{3*1 o.y}}

fp=:{{_3*1 o.y}}

gp=:{{3*2 o.y}}



La **Surface** et le **Volume** du tore se calculent aisément en utilisant les 2 Th de GULDIN :

Surface du tore **S**

$$S=2\pi r.2\pi R \Rightarrow S=4\pi^2 Rr$$

4p2*R*r

NB. En J

592.1762640653615

NB. Surface du tore en cm³

(f fp`gp) SROTC 200 (_1p1 1p1)

592.1762640653614

NB. Confirmation !

Volume du tore **V**

$$V= \pi r^2.2\pi R \Rightarrow V=2\pi^2 Rr^2$$

2p2*Rr**

NB. En J

888.2643960980422

NB. Volume du tore en cm³

(f ` gp) VOLROTC 200 (_1p1 1p1)
 888.2643960980419 NB. Confirmation !

Calcul du **moment quadratique de la surface** du tore **MQS**

$$MQS = \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) 2\pi x(t) r dt = 4\pi r \int_0^{\pi} (R+r \cdot \cos(t))^3 dt$$

$$MQS = 4\pi r \cdot R^3 \int_0^{\pi/2} \left\{ \left(1 + \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \cos(t)\right)^3 + \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \cos(t)\right)^3 \right\} dt$$

$$MQS = 8\pi r \cdot R^3 \left\{ \int_0^{\pi/2} dt + 3 \cdot \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt \right\} = 8\pi r \cdot R^3 \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow MQS = 4\pi^2 r \cdot R^3 \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{r}{R}\right)\right)$$

$4\pi^2 r \cdot (R^3) \cdot \left(1 + 3r \cdot \frac{r}{R}\right)$ NB. En J

22798.78616651642 NB. Moment quadratique de la surface du tore en cm⁴

(f ` fp ` gp) MQSROTC 200 (_1p1 1p1)

22798.78616651641 NB. Confirmation !

Calcul du **rayon de giration de la surface** du tore **RGS**

$$RGS^2 = \frac{MQS}{S} = R^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)\right) \Rightarrow RGS = R \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)\right)^{1/2}$$

$R \cdot \left(1 + 3r \cdot \frac{r}{R}\right)$ NB. En J

6.204836822995428 NB. Rayon de giration de la surface du tore en cm

(f ` fp ` gp) RAYGSROTC 200 (_1p1 1p1)

6.204836822995428 NB. Confirmation !

Calcul du **moment quadratique du volume** du tore **MQV**

$$MQV = \int_0^r 4\pi^2 \rho R^3 \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)\right) d\rho = 4\pi^2 R^3 \int_0^r \left(\rho + \left(\frac{3}{2 \cdot R^2}\right) \cdot \rho^3\right) d\rho$$

$$MQV = 4 \cdot \pi^2 \cdot R^3 \cdot \left[\left(\frac{\rho^2}{2}\right) + \left(\frac{3}{2R^2}\right) \cdot \left(\frac{\rho^4}{4}\right) \right]_0^r \Rightarrow MQV = 2\pi^2 R^3 r^2 \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$2\pi^2 \cdot (R^3) \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right) + 3r^4 \cdot \frac{r}{R}$ NB. En J

28202.39457611284 NB. Moment quadratique du volume du tore en cm⁵

(f ` gp) MQVROTC 200 (_1p1 1p1)

28202.39457611283 NB. Confirmation !

Rayon de giration du volume du tore RGV

$$RGV^2 = MQV/V \Rightarrow RGV = R(1 + (3/4)(r/R)^2)^{1/2}$$

R*%:1+3r4r%R** NB. En J

5.634713834792322 NB. Rayon de giration du volume du tore en cm

(f`gp) RAYGVROTC 200 (_1p1 1p1)

5.634713834792323 NB. Confirmation !