FRACTIONS CONTINUES (FC)

R. Coquidé 03/11/2026

I) *GÉNÉRALITÉS*

Définitions (notations diverses)

Fraction Continue Simple (FCS)	**Fraction Continue Généralisée (FCG)**
$X= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$ a_k=k^e dénominateur partiel $\left(\frac{1}{}\right)$=k^e quotient partiel $X=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n] = [a_0;\underset{1,1\ldots\ 1}{a_1,a_2,\ldots,a_n}]$ $X=a_0 + \frac{1}{\lvert a_1} + \frac{1}{\lvert a_2} + \frac{1}{\lvert a_3} + \ldots + \frac{1}{\lvert a_n}$ $X= a_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$	$X= a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$ b_k=k^e numérateur partiel a_k=k^e dénominateur partiel $\left(\frac{b_k}{}\right)$=k^e quotient partiel $X=[a_0;\underset{b_1,b_2\ldots b_n}{a_1,a_2,\ldots,a_n}]$ $X=a_0 + \frac{b_1}{\lvert a_1} + \frac{b_2}{\lvert a_2} + \frac{b_3}{\lvert a_3} + \ldots + \frac{b_n}{\lvert a_n}$ $X= a_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

Une **FC** peut être **finie** (**FCF**) ou **infinie** (**FCI**) selon qu'elle comporte **n** étages ou une infinité (dans ce cas cela impose une étude de convergence).

FCF	**FCI**
$X=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$ **FCSF** $X=[a_0;\underset{b_1,b_2\ldots b_n}{a_1,a_2,\ldots,a_n}]$ **FCGF** $X= a_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$	$X=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots]$ **FCSI** $X=[a_0;\underset{b_1,b_2\ldots b_n\ldots}{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots}]$ **FCGI** $X= a_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

Une **FC** peut être **arithmétique** (*ses éléments sont des nombres : entiers, rationnels, réels ou complexes*) ou **algébrique** (*ses éléments sont alors des fonctions, des polynômes, des séries…*).

En limitant le nombre d'étages à 0, 1, 2 … d'une **FC** on obtient ses « **réduites** » : R_k

R_k se nomme la **k^e réduite** ou le **k^e convergent** ou le **k^e approximant**

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$R_0=[a_0]=a_0$ $R_1=[a_0;a_1]=(a_0a_1+1)/a_1$ $R_2=[a_0;a_1,a_2]=(a_0a_1a_2+a_0+a_2)/(a_1a_2+1)$ etc	$R_0=[a_0]=a_0$ $R_1=[\underset{b_1}{a_0;a_1}] =(a_0a_1+b_1)/a_1$ $R_2=[\underset{b_1,b_2}{a_0;a_1,a_2}]=(a_0a_1a_2+a_0b_2+a_2b_1)/(a_1a_2+b_2)$ etc

Les **réduites** sont des **FCF** qui s'expriment au moyen de quotients $R_k=P_k/Q_k$ (Seuls les R_k sont fixés, les P_k et Q_k sont déterminés à un même facteur multiplicatif non nul près)

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$P_0=a_0$ $Q_0=1$ $P_1= a_0a_1+1$ $Q_1=a_1$ $P_2= a_0a_1a_2+a_0+a_2$ $Q_2= a_1a_2+1$ etc	$P_0=a_0$ $Q_0=1$ $P_1= a_0a_1+b_1$ $Q_1=a_1$ $P_2= a_0a_1a_2+a_0b_2+a_2b_1$ $Q_2= a_1a_2+b_2$ etc

Quotient complet et quotient incomplet

pour une **FCS**	pour une **FCG**
Complet : $1/(a_k+x_k)$ **incomplet :** $1/a_k$ avec $X= [a_0;a_1,a_2\ldots a_{k-1},a_k+x_k]$ où $x_k=[0;a_{k+1},a_{k+2}\ldots a_N]$	**Complet :** $b_k/(a_k+x_k)$ **incomplet :** b_k/a_k avec $X= [a_0;\underset{b_1,b_2\ldots b_{k-1},b_k}{a_1,a_2\ldots a_{k-1},a_k+x_k}]$ où $x_k=[0;\underset{b_{k+1},b_{k+2}\ldots b_N}{a_{k+1},a_{k+2}\ldots a_N}]$

Une **FCS** est **régulière (FCR)** si les a_k sont **entiers** avec $a_k > 0$ pour $k > 0$

Deux FC équivalentes ont mêmes réduites et convergent vers la même limite ou divergent ensemble.

Une série et une FC sont équivalentes si les sommes partielles $S_k=R_k$ pour tout k.

Th1 : (Euler) Relations de récurrence ($\mathcal{P}1$) Si on pose $\mathbf{P_{-1}=1}$; $\mathbf{Q_{-1}=0}$; $\mathbf{P_0=a_0}$; $\mathbf{Q_0=1}$ **on a pour tout k>0 :**

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$\mathbf{P_k=a_kP_{k-1}+P_{k-2}}$ et $\mathbf{Q_k=a_kQ_{k-1}+Q_{k-2}}$	$\mathbf{P_k=a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2}}$ et $\mathbf{Q_k=a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2}}$

Démonstration :
En faisant la démonstration pour une **FCG** ce sera démontré pour une **FCS** en remplaçant les $\mathbf{b_k}$ par **1**
Notons ($\mathcal{P}1$) cette propriété. Remarquons que ($\mathcal{P}1$) est vérifiée pour k=1 et 2 :
$P_1=a_1a_0+b_1=a_1P_0+b_1P_{-1}$ et $Q_1=a_1=a_1Q_0+b_1Q_{-1}$
$P_2=a_2(a_0a_1+b_1)+b_2a_0=a_2P_1+b_2P_0$ et $Q_2=a_2a_1+b_2=a_2Q_1+b_2Q_0$
Supposons ($\mathcal{P}1$) juste jusqu'à un ordre k-1 : $P_{k-1}=a_{k-1}P_{k-2}+b_{k-1}P_{k-3}$ et $Q_{k-1}=a_{k-1}Q_{k-2}+b_{k-1}Q_{k-3}$
On passe de $R_{k-1}=[\underline{a_0};\underline{a_1},\ldots,\underline{a_{k-1}}]$ à R_k en remplaçant a_{k-1} et b_{k-1} par $a_{k-1}a_k+b_k$ et $b_{k-1}a_k$
$b_1,b_2,\ldots,b_{k-1}$
donc $P_k=(a_{k-1}a_k+b_k)P_{k-2}+(b_{k-1}a_k)P_{k-3}=ak(a_{k-1}P_{k-2}+b_{k-1}P_{k-3})+b_kP_{k-2}=a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2}$
$Q_k=(a_{k-1}a_k+b_k)Q_{k-2}+(b_{k-1}a_k)Q_{k-3}=ak(a_{k-1}Q_{k-2}+b_{k-1}Q_{k-3})+b_kQ_{k-2}=a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2}$ ($\mathcal{P}1$) juste à l'ordre k
Etant vérifiée pour k = 1 et 2 ($\mathcal{P}1$) est juste pour k=3 puis 4 ,5…donc pour tout k. cqfd

Th2 Propriété ($\mathcal{P}2$)(**Euler**)
On pose $\mathbf{B_0=1}$ et pour tout **k>0** $\boxed{B_k=b_1b_2b_3\ldots b_{k-1}b_k}$ si **FCG** et $\boxed{B_k=1}$ si **FCS**

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$\mathbf{P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^{k-1}}$	$\mathbf{P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^{k-1}B_k}$

Démonstration : Par récurrence (pour une **FCG**). En remplaçant les $\mathbf{b_k}$ par **1** ce sera démontré pour une **FCS**
pour k=1 on a $P_1Q_0-P_0Q_1=(a_0a_1+b_1)1-a_0a_1=b_1$ et
pour k=2 on a $P_2Q_1-P_1Q_2=(a_0a_1a_2+a_0b_2+a_2b_1)(a_1)-(a_0a_1+b_1)(a_1a_2+b_2)$
$P_2Q_1-P_1Q_2=-b_1b_2$ Donc ($\mathcal{P}2$) est vérifiée pour k=1 et k=2
Supposons ($\mathcal{P}2$) juste jusqu'à un ordre **k-1** : $\mathbf{P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}=(-1)^{k-2}b_1b_2\ldots b_{k-1}}$ il vient alors :
$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2})Q_{k-1}-P_{k-1}(a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2})$ en utilisant ($\mathcal{P}1$)
$=a_k(P_{k-1}Q_{k-1}-P_{k-1}Q_{k-1})-b_k(P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1})=-b_k((-1)^{k-2}b_1b_2\ldots b_{k-1})\Rightarrow$
$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^{k-1}b_1b_2b_3\ldots b_k$ et ($\mathcal{P}2$) est encore juste à l'ordre k
Etant vérifiée pour k=1 et 2 elle est juste pour k=3, 4, 5 … donc pour tout k cqfd

Th3 Propriété ($\mathcal{P}3$) (**Euler**)

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$\boldsymbol{R_k-R_{k-1}=\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}}$	$\boldsymbol{R_k-R_{k-1}=\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}}$

Démonstration :
Il suffit de diviser la formule ($\mathcal{P}2$) par $\mathbf{Q_kQ_{k-1}}$ cgfd

Th4 Propriété ($\mathcal{P}4$) (**Euler**)

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$\boldsymbol{R_k-R_{k-2}=\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}=(-1)^k\frac{a_k}{Q_{k-2}Q_k}}$	$\boldsymbol{R_k-R_{k-2}=\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}=(-1)^k\frac{a_kB_{k-1}}{Q_{k-2}Q_k}}$

Démonstration :
On utilise ($\mathcal{P}1$) et ($\mathcal{P}2$) dans le cas d'une **FCG** :
$P_kQ_{k-2}-P_{k-2}Q_k=(a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2})Q_{k-2}-P_{k-2}(a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2})=a_k(P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1})=a_k(-1)^{k-1}B_{k-1}$
En divisant les 2 membres par $Q_{k-2}Q_k$ on obtient la formule cherchée cqfd
Avec $b_k=1$ pour tout k la formule est démontrée pour une **FCS**

Th5 : Propriété (P5) (**Euler**)

pour une **FCS**	pour une **FCG**
Mêmes formules que pour une **FCG** mais, en plus, $\mathbf{b_k=1}$ pour tout **k**	$$a_k=\frac{Q_k}{Q_{k-1}}\cdot\frac{R_k-R_{k-2}}{R_{k-1}-R_{k-2}}=\frac{P_kQ_{k-2}-P_{k-2}Q_k}{P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}}$$ $$b_k=-\frac{Q_k}{Q_{k-2}}\cdot\frac{R_k-R_{k-1}}{R_{k-1}-R_{k-2}}=-\frac{P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k}{P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}}$$

Démonstrations :

$(P4)\Rightarrow\ R_k-R_{k-2}=(-1)^k\frac{a_kB_{k-1}}{Q_{k-2}Q_k}$ $(P3)\Rightarrow\ R_{k-1}-R_{k-2}=(-1)^k\frac{B_{k-1}}{Q_{k-2}Q_{k-1}}$ $\Rightarrow$

$$\frac{R_k-R_{k-2}}{R_{k-1}-R_{k-2}}=a_k\frac{Q_{k-1}}{Q_k}\ \Rightarrow\ a_k=\frac{Q_k}{Q_{k-1}}\cdot\frac{R_k-R_{k-2}}{R_{k-1}-R_{k-2}}\ \text{cqfd}\ a_k=\frac{Q_k}{Q_{k-1}}\cdot\frac{\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}}{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}}\ \Rightarrow$$

$$a_k=\frac{P_kQ_{k-2}-P_{k-2}Q_k}{P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}}\ \text{cqfd}$$

$(P3)\Rightarrow\ R_k-R_{k-1}=(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}\ \Rightarrow\ \frac{R_k-R_{k-1}}{R_{k-1}-R_{k-2}}=\frac{-B_k}{B_{k-1}}\cdot\frac{Q_{k-2}Q_{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}=-b_k\frac{Q_{k-2}}{Q_k}\ \Rightarrow$

$$b_k=-\frac{Q_k}{Q_{k-2}}\cdot\frac{R_k-R_{k-1}}{R_{k-1}-R_{k-2}}\ \text{cqfd}\Rightarrow\ b_k=-\frac{Q_k}{Q_{k-2}}\cdot\frac{\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}}{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}}=-\frac{P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k}{P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}}\ \text{cqfd}$$

Th5bis : (Euler)

Les $\mathbf{R_k=P_k/Q_k}$ étant fixés mais les $\mathbf{P_k}$ et $\mathbf{Q_k}$ étant déterminés à un même facteur multiplicatif arbitraire non nul près, on peut choisir de fixer $\mathbf{Q_k/Q_{k-1}=1}$ pour tout $\mathbf{k>1}$. Dans ce cas, les formules du **Th5** deviennent :

$$a_k=\frac{R_k-R_{k-2}}{R_{k-1}-R_{k-2}}=\frac{P_k-P_{k-2}}{P_{k-1}-P_{k-2}}$$

si pour tout **k>1** : $\frac{Q_k}{Q_{k-1}}=1$ donc $Q_k=Q\neq0$

$$b_k=-\frac{R_k-R_{k-1}}{R_{k-1}-R_{k-2}}=-\frac{P_k-P_{k-1}}{P_{k-1}-P_{k-2}}$$

Démonstration :
Simplification évidente d'après le **Th5**

Th6 Propriété (P6) (**Euler**)

(Si $a_k>0$, $b_k>0$ pour tout k>0) $\Rightarrow$ ($R_{2k-2}<R_{2k}<X<R_{2k-1}<R_{2k+1}$) pour tout k>0
La suite (R_{2k}) est croissante, la suite (R_{2k+1}) est décroissante et il existe n tel que $X=R_n$ si c'est une FCF.
Dans le cas d'une FCI, si $|R_k-R_{k-1}|\to0$ quand $k\to\infty$ alors $R_k\to X$

Démonstration : évident d'après les propriétés précédentes.

Th7 Propriété ($\mathcal{P}7$) (**Euler**)

pour une **FCS**	pour une **FCG**
$(P_k/P_{k-1}) = [a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_1,a_0]$ $(Q_k/Q_{k-1}) = [a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_2,a_1]$	$(P_k/P_{k-1}) = [\underline{a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_1,a_0}]$ $\underline{\quad b_k,b_{k-1},\ldots,b_2,b_1}$ $(Q_k/Q_{k-1}) = [\underline{a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_2,a_1}]$ $\underline{\quad b_k,b_{k-1},\ldots,b_3,b_2}$

Démonstration :

$(P_k/P_{k-1}) = [\underline{a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_1,a_0}]$ ($\mathcal{P}7a$) Vérification pour **k = 1** et **2** :

$\underline{\quad b_k,b_{k-1},\ldots,b_2,b_1}$

$(P_1/P_0)=(a_0a_1+b_1)/a_0 = a_1+ b_1/a_0 = [\underline{a_1\ ;\ a_0}]$ $\underline{\quad b_1}$ $\qquad (P_2/P_1) = \underline{a_0a_1a_2+a_0b_2+a_2b_1}{a_0a_1+b_1} = a_2 + \underline{b_2}{a_1+b_1/a_0} = [\underline{a_2;a_1,a_0}]$ $\underline{\quad b_2,b_1}$

($\mathcal{P}7a$) est donc vérifiée pour k = 1 et 2

Supposons que ($\mathcal{P}7a$) soit juste à l'ordre k-1 : $(P_{k-1}/P_{k-2}) = [\underline{a_{k-1}\ ;a_{k-2},\ldots,a_1,a_0}]$ $\underline{\quad b_{k-1},\ldots,b_2,b_1}$ On utilise ($\mathcal{P}1$) :

$(P_k/P_{k-1}) = ((a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2})/P_{k-1}) = a_k + \underline{b_k}{P_{k-1}/P_{k-2}} = a_k + \underline{b_k}{[\underline{a_{k-1}\ ;a_{k-2},\ldots,a_1,a_0}]\ \underline{\quad b_{k-1},\ldots,b_2,b_1}} = [\underline{a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_1,a_0}]$ $\underline{\quad b_k,b_{k-1},\ldots,b_2,b_1}$ Donc,

($\mathcal{P}6a$) est encore juste à l'ordre k. Ce qui termine la démonstration par récurrence. cqfd

$(Q_k/Q_{k-1}) = [\underline{a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_2,a_1}]$ ($\mathcal{P}7b$) Vérification pour k = 1 et 2 :

$\underline{\quad b_k,b_{k-1},\ldots,b_3,b_2}$

$(Q_1/Q_0) = a_1/1 = [a_1]$ $\qquad (Q_2/Q_1) = (a_1a_2+b_2)/a_1 =a_2 +b_2/a_1 =[\underline{a_2;a_1}]$ $\underline{\quad b_2}$

($\mathcal{P}7b$) est donc vérifiée pour k = 1 et 2

Supposons que ($\mathcal{P}6a$) soit juste à l'ordre k-1 : $(Q_{k-1}/Q_{k-2}) = [\underline{a_{k-1}\ ;a_{k-2},\ldots,a_2,a_1}]$ $\underline{\quad b_{k-1},\ldots,b_3,b_2}$ On utilise ($\mathcal{P}1$) :

$(Q_{k-1}/Q_{k-2}) = ((a_kQ_{k-1} + b_kQ_{k-2})/Q_{k-1}) = a_k + \underline{b_k}{(Q_{k-1}/Q_{k-2})} = a_k + \underline{b_k}{[\underline{a_{k-1}\ ;a_{k-2},\ldots,a_2,a_1}]\ \underline{\quad b_{k-1},\ldots,b_3,b_2}} = [\underline{a_k;a_{k-1},a_{k-2},\ldots,a_2,a_1}]$ $\underline{\quad b_k,b_{k-1},\ldots,b_3,b_2}$ Donc :

($\mathcal{P}6b$) est encore juste à l'ordre k. Ce qui termine la démonstration par récurrence. cqfd

Tout est démontré pour une FCG , également pour une FCS en posant b_k =1 pour tout k. cqfd

Th8 : Formules de sommation (Euler)

pour une **FCS**	pour une **FCG**
Si $\mathbf{k_1<k_2}$: $\boldsymbol{R_{k_2}=R_{k_1-1}+\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}}$	Si $\mathbf{k_1<k_2}$: $\boldsymbol{R_{k_2}=R_{k_1-1}+\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}}$
$\boldsymbol{R_N=a_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}}$	$\boldsymbol{R_N=a_0+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}}$

Démonstration :

D'après ($\mathcal{P}3$) $\boldsymbol{R_k-R_{k-1}=(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}}$ on somme entre **k1** et **k2**

$$\boldsymbol{R_{k_2}-R_{k_1-1}=\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}} \Rightarrow \boldsymbol{R_{k_2}=R_{k_1-1}+\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}}$$ cqfd on pose $\mathbf{k_2=N}$, $\mathbf{k_1=1}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R_N=a_0+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{Q_{k-1}Q_k}}$$ cqfd

Th9 : Passage de R_{k-1} à R_k

$$[R_{k-1}=\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}]\rightarrow[R_k=\frac{P_k}{Q_k}] \quad \Longleftrightarrow \quad [\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}]\rightarrow[\frac{b_{k-1}a_k}{a_{k-1}a_k+b_k}]$$

Démonstration :
D'après les définitions, c'est assez évident car l'ajout à a_{k-1} de b_k/a_k correspond à cette transformation. cqfd

Th10 : Produit d'un a_j (avec **j>0**) par un facteur **c≠0** ⇒ b_j et b_{j+1} doivent aussi être multipliés par **c**

$X=a_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{1}{a_k})=a'_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{b'_k}{a'_k})$ avec	$X=a_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{b_k}{a_k})=a'_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{b'_k}{a'_k})$ avec
$a'_k=a_k$ et $b'_k=1$ pour tout **k** sauf :	$a'_k=a_k$ et $b'_k=b_k$ pour tout **k** sauf :
$a'_j=c.a_j$, $b'_j=c$ et $b'_{j+1}=c$	$a'_j=c.a_j$, $b'_j=c.b_j$ et $b'_{j+1}=c.b_{j+1}$

Démonstration :

$X= a_0 + \underline{b_1}$
$a_1 + \underline{b_2}$
.
.
$a_{j-1} + \underline{c.b_j}$
$c.a_j + \underline{c.b_{j+1}}$
$a_{j+1}+\underline{b_{j+2}}$
.

Il est évident d'après la définition d'une **FC** que cette opération ne change pas la valeur de **X**

Vrai pour une **FCF** ou une **FCI**

Th11 : (**Euler**) **Modification avec (c_k) une suite d'éléments réels ou complexes ≠ 0 avec c_0=1**
On peut remplacer les a_k par $a'_k = c_k.a_k$ et les b_k par $b'_k=c_k.c_{k-1}.b_k$ sans changer la valeur de **X** ni celles des R_k

$X= a_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{1}{a_k})=a_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{c_{k-1}\cdot c_k}{c_k\cdot a_k})$ **FCSF**	$X= a_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{b_k}{a_k})=a_0+\underset{k=1}{\overset{N}{K}}(\frac{c_{k-1}\cdot c_k\cdot b_k}{c_k\cdot a_k})$ **FCGF**
$X= a_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{1}{a_k})=a_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{c_{k-1}\cdot c_k}{c_k\cdot a_k})$ **FCSI**	$X= a_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{b_k}{a_k})=a_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{c_{k-1}\cdot c_k\cdot b_k}{c_k\cdot a_k})$ **FCGI**

Démonstration :
On utilise le th précédent pour chaque a_k et c'est immédiat cqfd

Th12 : (Euler) Transformation d'une Série en FCG

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$$

$a_0=u_0$; $a_1=1$; $b1=u1$

$$a_k=1+\frac{u_k}{u_{k-1}} \quad k>1$$

$$b_k=\frac{-u_k}{u_{k-1}} \quad k>1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}u_k=a_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{b_k}{a_k})$$

Démonstration :

Soient la série $S=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ et S_k les sommes partielles.

D'après le **Th5** les formules donnant a_k et b_k sont établies.

$a_0=u_0$; $a_k=\frac{Q_k}{Q_{k-1}}.\frac{R_k-R_{k-2}}{R_{k-1}-R_{k-2}}$; $b_k=\frac{-Q_k}{Q_{k-2}}.\frac{R_k-R_{k-1}}{R_{k-1}-R_{k-2}}$ On veut $R_k=S_k$ pour tout $k>0$

d'où $a_k=\frac{Q_k}{Q_{k-1}}.\frac{u_k+u_{k-1}}{u_{k-1}}$; $b_k=\frac{-Q_k}{Q_{k-2}}.\frac{u_k}{u_{k-1}}$ La **FC** est établie.

On la compose (voir **Th11**) avec la suite (d_k) où $d_0=1$ et $d_k=Q_{k-1}/Q_k$ pour $k>0$. On obtient :

$a_k=1+\frac{u_k}{u_{k-1}}$ et $b_k=\frac{-u_k}{u_{k-1}}$ cqfd

Th13 : (Euler) Transformation d'une FCG en Série

vérifié

$P_{-1}=1 \quad Q_{-1}=0$
$P_0=a_0 \quad Q_0=1$
$P_k=a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2}$
$Q_k=a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2}$
$B_k=b_1b_2...b_k$

$\Rightarrow$

$$a_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{Q_kQ_{k-1}}$$

Démonstration :
D'après le **Th8**, les formules sont établies. On somme de 1 à l'infini et on obtient une série équivalente à la FC , c'est-à-dire qu'on a $S_k=R_k$ pour tout k. Donc elles convergent vers la même limite ou divergent ensemble. cqfd

Th14 : Transformation d'une suite en FCG (Euler)

S=lim (S_k) quand k tend vers l'infini

$\Delta S_k=S_{k+1}-S_k \Rightarrow S=S0+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta S_{k-1}$ $\Rightarrow$ $S=S_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ $b_1=\Delta S_0$, $a_1=1$, $b_k=-\Delta S_{k+1}/\Delta S_k$, $a_k=1+\Delta S_{k+1}/\Delta S_k$

Démonstration :
On applique le **Th12** avec $u_0=S_0$ et et $u_k=\Delta S_{k-1}$ cqfd

Th15 : (Euler) Transformation d'une FCG en une série

(x_k) $k>0$ une suite
$a_1=1$, si $k>1$: $a_k=1-x_k$
$b_k=x_k$

$\Rightarrow$ (P15a)

$$\overset{N}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}x_1x_2x_3...x_k$$

vérifiés

(x_k) $k>0$ une suite
$a_1=1$, si $k>1$: $a_k=1+x_k$
$b_k=-x_k$

$\Rightarrow$ (P15b)

$$\overset{N}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)=-\sum_{k=1}^{N}x_1x_2x_3...x_k$$

Démonstration :
Appliquons le **Th12** . On a $u_k=(-1)^{k-1}x_1x_2x_3...x_k$ donc $u_k/u_{k-1}=-x_k$, $b_k=-u_k/u_{k-1}=x_k$, $a_k=1+u_k/u_{k-1}=1-x_k$
$a_0=u_0=0$, $a_1=1$, $b_1=u_1=x_1$ ***(Th15a)*** cqfd
On change $x_k \rightarrow -x_k$ donc $b_k \rightarrow -b_k=x_k$, $a_k \rightarrow 1+x_k$ ***(Th15b)*** cqfd

Th16 : (Euler) Transformation d'une FCG en FCS

$$\left[c_0=1\,;c_k=\frac{1}{b_kc_{k-1}}\right]\Rightarrow\left[\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)=\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{1}{a_kc_k}\right)\right]$$

Démonstration :
Simple application de **Th11** cqfd

Th17 : (Euler) Transformation d'une FCG avec a'$_k$ =1 pour tout k > 0

$$[c_0=1\,;c_k=\frac{1}{a_k}]\Rightarrow[\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}(\frac{b_k}{a_k})=\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}(\frac{b_k c_k c_{k-1}}{1})]$$

Démonstration :
Simple application de **Th11** cqfd

Th18 : (Euler) Transformation d'une série en FCG

vérifié

2 suites réelles ou complexes
(x_k) et (y_k) $k\geq 0$
pour tout k : $x_k\neq 0$ et $y_k\neq 0$
$a_0=x_0/y_0$, $a_1=1$, $b_1=x_0x_1/y_0$
pour $k>1$: $a_k=x_k+y_k$, $b_k=-x_ky_{k-1}$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_0x_1x_2\ldots x_k}{y_0y_1y_2\ldots y_k}=a_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}(\frac{b_k}{a_k})$$

Démonstration :
Appiquons le **Th12 .** On a $u_k=(x_0x_1\ldots x_k)/(y_0y_1\ldots y_k)$, $u_k/u_{k-1}=x_k/y_k$, $b_k=-x_k/y_k$, $a_k=1+x_k/y_k$ on obtient donc une ***FC*** que l'on compose (voir **Th11**) avec la suite (c_k) où $c_0=1$, $c_k=.y_k$ pour $k>0$. On obtient :
$a_k=x_k+y_k$, $b_k=-x_ky_{k-1}$ avec $a_0=u_0=x_0/y_0$ cqfd

Th19 : (Euler) Transformation d'une série en FCG

2 suites réelles ou complexes
(x_k) et (y_k) $k\geq 0$ $x_k\neq 0$ et $y_k\neq 0$, $y_{-1}=1$
$a_0=x_0/y_0$, $a_1=(y_1-x_1)/y_0$
$b_k=x_k$, $a_k=(y_k-x_ky_{k-2})/y_{k-1}$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x_0x_1\ldots x_k}{y_{k-1}y_k}=a_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}(\frac{b_k}{a_k})$$

Démonstration :
Appliquons le **Th12.** On a $u_k=(-1)^kx_0x_1\ldots x_k/y_{k-1}y_k$, $u_k/u_{k-1}=-x_ky_{k-2}/y_k$, $a_0=u_0=x_0/y_0$
$b_k=-u_k/u_{k-1}=x_ky_{k-2}/y_k$, $a_k=1+u_k/u_{k-1}=1-x_ky_{k-2}/y_k$ On obtient une ***FCG*** que l'on compose (voir **Th11**) avec la suite (c_k) **où** $c_0=1$, $c_k=y_k/y_{k-1}$ Il vient : $b_k=-x_k(y_{k-2}/y_k)(y_k/y_{k-1})(y_{k-1}/y_k)=-x_k$, $a_k=(y_k-x_ky_{k-2})/y_{k-1}$, $a_1=(y_1-x_1)/y_0$
cqfd

Th20 : (Euler) Transformation d'une série en FCG

(x_k) $k\geq 0$; $x_k\neq 0$, $x_k\neq -1$
suite réelle ou complexe
$a_0=x_0$, $a_1=1$, $b_1=x_0x_1$
$a_k=1+x_k$, $b_k=-x_k$

$\Rightarrow$ (**Th20A**)

$$\sum_{k=0}^{\infty}x_0x_1x_2\ldots x_k=a_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}(\frac{b_k}{a_k})$$

(x_k) $k\geq 0$; $x_k\neq 0$, $x_k\neq 1$
suite réelle ou complexe
$a_0=x_0$, $a_1=1$, $b_1=-x_0x_1$
$a_k=1-x_k$, $b_k=x_k$

$\Rightarrow$ (**Th20B**)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx_0x_1x_2\ldots x_k=a_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}(\frac{b_k}{a_k})$$

Démonstration :
On utilise le **Th18** avec $y_i=1$ pour tout **i** **Th20A** cqfd
Dans **Th20A** on remplace x_k par $-x_k$ pour $k>0$ **Th20B** cqfd

Th21 : (Euler) Transformation d'une série de puissances en FCG et réciproquement

(y_k) $k\geq 0$; $y_k \neq 0$ suite réelle ou complexe, z réel ou complexe
$a_0=1/y_0$, $a_1=1$, $b_1=z/y_0y_1$
pour $k>1 : a_k=y_k+z$, $b_k=-y_{k-1}z$

$\Rightarrow$ ***Th20a***

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_k} = a_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

(y_k) $k\geq 0$; $y_k \neq 0$ suite réelle ou complexe, z réel ou complexe

$\Rightarrow$ ***Th20b***

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_k} = \frac{1}{y_0} + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{y_k z}{y_{k+1} - z}\right)$$

Démonstration :
On utilise le **Th18** en changeant $x_0=1$, $x_k=z$ pour $k>0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0 x_1 x_2 \cdots x_k}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_k} = \frac{x_0}{y_0} + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{-x_k y_{k-1}}{x_k + y_k}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_k} = \frac{1}{y_0} + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{-y_k z}{y_{k+1} + z}\right)$$ ***Th20a*** cqfd

On change $z \rightarrow -z$ $\Rightarrow$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_k} = \frac{1}{y_0} + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{y_k z}{y_{k+1} - z}\right)$$ ***Th20b*** cqfd

Th22 : (Euler) Transformation d'une série en FCG et réciproquement

(y_k) $k\geq 0$; $y_k \neq 0$ suite réelle ou complexe
z réel ou complexe , $a_0=1/y_0$, $a_1=y_1$, $b_1=z$
pour $k>1 : b_k=-y_{k-1}^2 z$, $a_k=y_k+y_{k-1}z$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{y_k} = a_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{K}} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Démonstration :
On applique le **TH12**. $a_0=1/y_0$, $a_1=1$, $b_1=z/y_1$, $u_k/u_{k-1}=zy_{k-1}/y_k$, $a_k=1+zy_{k-1}/y_k$, $b_k=-zy_{k-1}/y_k$
On compose avec $(d_k) : d_0=1$, $d_k=y_k$
$a_1=y1$, $b_1=z$, pour $k>1 : a_k=y_k+y_{k-1}z$, $b_k=-y_{k-1}^2 z$ cqfd

Th23 : (réduction de 2 itérations)

$$a_0 + K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = a'_0 + K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b'_n}{a'_n}\right) \text{ où } a'_0 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \text{ , } b'_n = -\frac{b_{2n-1}b_{2n}}{a_{2n-1}^2} \text{ , } a'_n = a_{2n} + \frac{b_{2n}}{a_{2n-1}} + \frac{b_{2n+1}}{a_{2n+1}}$$

II) **FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES**

Th24 : Transformation d'une série de puissances en FCG algébrique (Euler)

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k=[\frac{c_0;1,1+(c_2/c_1)t,\dots,1+(c_k/c_{k-1})t,\dots}{c_1 t,(-c_2/c_1)t,\dots,(-c_k/c_{k-1})t,\dots}]$$

Démonstration :
On utilise le **Th13**

$$\sum_{j=0}^{k} u_j=a_0+\underset{j=1}{\overset{k}{K}}(\frac{b_j}{a_j}) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} u_j=a_0+\underset{j=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{b_j}{a_j})$$

$a_0=u_0$, $a_1=1$, $b_1=u_1$, si $j>1$: $b_j=(-u_j/u_{j-1})$ $a_j=1+(u_j/u_{j-1})$

avec $u_j=c_j t^j$ Il vient : $a_0=c_0$, $a_1=1$, $b_1=c_1 t$ et si $j>1$: $b_j=(-c_j/c_{j-1})t$, $a_j=1+(c_j/c_{j-1})t$ cqfd

Th25 : Algorithme QD1

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow F(z)=\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{b_n}{1});\ b_1=c_0;\ b_{2n}=-q_n^0 z;\ b_{2n+1}=-e_n^0 z$$

pour k≥0 : $e_0^k=0;\ q_1^k=c_{k+1}/c_k$

pour k≥0 et j>0 : $e_j^k=e_{j-1}^{k+1}+q_j^{k+1}-q_j^k$; $q_{j+1}^k=e_{j-1}^{k+1}.q_j^{k+1}/e_j^k$

Th26 : Algorithme QD2

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow F(z)=\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(\frac{b_n}{a_n});\ b_1=c_0;\ pour\ n\geqslant 2:\ b_n=-e_{n-1}^0 q_{n-1}^0 z^2$$

$$pour\ n>0:\ a_n=1-(e_{n-1}^0+q_n^0)z$$

pour k≥0 : $e_0^k=0;\ q_1^k=c_{k+1}/c_k$

pour k≥0 et j>0 : $e_j^k=e_{j-1}^{k+1}+q_j^{k+1}-q_j^k$; $q_{j+1}^k=e_{j-1}^{k+1}.q_j^{k+1}/e_j^k$

Fractions continues issues des propriétés des fonctions hypergéométriques (Gauss)

On utlise les formules de **Gauss** (démontrées dans l'article « **Fonctions hypergéométriques** ») :

$$Fh(;a;z)=Fh(;a-1;z)-\frac{1}{a(a-1)}z.Fh(;a+1;z) \quad \textbf{(1)}$$

$$Fh(a+1;b;z)=Fh(a;b-1;z)-\frac{a-b+1}{b(b-1)}z.Fh(a+1;b+1;z) \quad \textbf{(2a)}$$

$$Fh(a;b;z)=Fh(a;b-1;z)-\frac{a}{b(b-1)}z.Fh(a+1;b+1;z) \quad \textbf{(2b)}$$

$$Fh(a,b;c-1;z)=Fh(a+1,b;c;z)-\frac{b(c-a-1)}{c(c-1)}z.Fh(a+1,b+1;c+1;z) \quad \textbf{(3a)}$$

$$Fh(a,b;c-1;z)=Fh(a,b+1;c;z)-\frac{a(c-b-1)}{c(c-1)}z.Fh(a+1,b+1;c+1;z)$$ **(3b)**

de ces formules, Gauss a démontré le théorème suivant

Th27 : (Gauss)

$$Fh(;a+1;z)/a.Fh(;a;z)=\cfrac{1}{|a+}\ \cfrac{z}{|a+1}+\cfrac{z}{|a+2}+\cfrac{z}{|a+3}+\ldots+\cfrac{z}{|a+k}+\ldots$$ **(I)**

$$Fh(a+1\ ;\ b+1;z)/b.Fh(a;b;z)=\cfrac{1}{|b+}\ \cfrac{(a-b)z}{|b+1}+\cfrac{(a+1)z}{|b+2}+\cfrac{(a-b-1)z}{|b+3}+\ldots+\cfrac{(a+k)z}{|b+2k}+\cfrac{(a-b-k)z}{|b+2k+1}+\ldots$$ **(II)**

$$Fh(a;b+1;z)/b.Fh(a;b;z)=\cfrac{1}{|b+}\ \cfrac{az}{|b+1}+\cfrac{(a-b-1)z}{|b+2}+\cfrac{(a+1)z}{|b+3}+\cfrac{(a-b-2)z}{|b+4}+\ldots+\cfrac{(a+k)z}{|b+2k+1}+\cfrac{(a-b-k-1)z}{|b+2k+2}+\ldots$$ **(III)**

$$Fh(a+1,b;c+1;z)/c.Fh(a,b;c;z)=\cfrac{1}{|c+}\ \cfrac{(a-c)bz}{|c+1}+\cfrac{(b-c-1)(a+1)z}{|c+2}+\cfrac{(a-c-1)(b+1)z}{|c+3}+\ldots+\cfrac{(a-c-k)(b+k)z}{|c+2k+1}+\cfrac{(b-c-k-1)(a+k+1)z}{|c+2k+2}+\ldots$$ **(IV)**

Cas particuliers :

$$Fh(1;b;z)=\cfrac{1}{1+}\ \cfrac{-z}{|b+}\ \cfrac{z}{|b+1}+\cfrac{-bz}{|b+2}+\cfrac{2z}{|b+3}+\cfrac{-(b+1)z}{|b+4}+\ldots+\cfrac{kz}{|b+2k-1}+\cfrac{-(b+2k-3)}{|b+2k}+\ldots$$ **(IIa)**

$$Fh(1,b;c;z)=\cfrac{1}{|1+}\ \cfrac{-bz}{|c+}\ \cfrac{(b-c)z}{|c+1}+\cfrac{-c(b+1)z}{|c+2}+\ldots+\cfrac{-(c+k-1)(b+k)z}{|c+k}+\cfrac{(b-c-k)(k+1)z}{|c+k+1}+\ldots$$ **(IVa)**

Démonstrations :

$$Fh(;a;z)=Fh(;a-1;z)-\frac{1}{a(a-1)}z.Fh(;a+1;z)$$ *(1)* $a\rightarrow a-1 \Rightarrow$

$Fh(;a;z)-Fh(;a+1;z)=1+\cfrac{z}{a(a+1)}Fh(;a+2;z) \Rightarrow \cfrac{Fh(;a;z)}{Fh(;a+1;z)}=1+\cfrac{\frac{z}{a(a+1)}}{\frac{Fh(;a+1;z)}{Fh(;a+2;z)}}$ et, en itérant :

$$\frac{Fh(;a;z)}{Fh(;a+1;z)}=1+\cfrac{\frac{z}{a(a+1)}}{1+\cfrac{z}{(a+1)(a+2)}}\ \Rightarrow\ \frac{a.Fh(;a;z)}{Fh(;a+1;z)}=a+\cfrac{z}{a+1+\cfrac{z}{a+2+\cfrac{z}{a+3}}}$$

$$1+\cfrac{z}{(a+2)(a+3)}$$

$$1+\ldots$$

par modification avec la suite $L=a,a+1,a+2,a+3\ldots$

$$\Rightarrow\ Fh(;a+1;z)/a.Fh(;a;z)=\cfrac{1}{|a+}\ \cfrac{z}{|a+1}+\cfrac{z}{|a+2}+\cfrac{z}{|a+3}+\ldots+\cfrac{z}{|a+k}+\ldots$$ cqfd **(I)**

$$Fh(a+1;b;z)=Fh(a;b-1;z)-\frac{a-b+1}{b(b-1)}z.Fh(a+1;b+1;z)$$ **(2a)**

$$Fh(a;b;z)=Fh(a;b-1;z)-\frac{a}{b(b-1)}z.Fh(a+1;b+1;z)$$ **(2b)**

Dans la formule **(2a)** on remplace **b** par **b+1**

Dans la formule **(2b)** on remplace **a** par **a+1** et **b** par **b+2**. On obtient :

$$\frac{Fh(a;b;z)}{Fh(a+1;b+1;z)}=1+\frac{\left(\frac{a-b}{b(b+1)}\right)z}{\frac{Fh(a+1;b+1;z)}{Fh(a+1;b+2;z)}} \quad \textbf{(A)} \qquad \frac{Fh(a+1;b+1;z)}{Fh(a+1;b+2;z)}=1+\frac{\left(\frac{a+1}{(b+1)(b+2)}\right)z}{\frac{Fh(a+1;b+2;z)}{Fh(a+2;b+3;z)}} \quad \textbf{(B)}$$

En itérant par utilisation alternée des formules **A,B,A,B,A,B,A…,** on obtient :

$$\frac{Fh(a;b;z)}{Fh(a+1;b+1;z)} = 1 + \cfrac{((a-b)/b(b+1))z}{1 + \cfrac{((a+1)/(b+1)(b+2))z}{1 + \cfrac{((a-b-1)/b+2)(b+3))z}{1 + \cfrac{((a+2)/(b+3)(b+4))z}{1 + \ldots}}}}$$

On modifie avec la suite ***L=1,b+1,b+2,b+3…*** et on multiplie les 2 membres par ***b*** On obtient :

$$\frac{bFh(a;b;z)}{Fh(a+1;b+1;z)} = b + \cfrac{(a-b)z}{b+1 + \cfrac{(a+1)z}{b+2 + \cfrac{(a-b-1)z}{b+3 + \cfrac{(a+2)z}{b+4 + \ldots + \cfrac{(a+k)z}{(b+2k-1)(b+2k) + \cfrac{(a-b-k)z}{(b+2k)(b+2k+1) + \ldots}}}}}}$$ et en inversant

$$Fh(a+1\ ;\ b+1;z)/b.Fh(a;b;z) = \cfrac{1}{b+ \cfrac{(a-b)z}{b+1 + \cfrac{(a+1)z}{b+2 + \cfrac{(a-b-1)z}{b+3 + \ldots + \cfrac{(a+k)z}{b+2k + \cfrac{(a-b-k)z}{b+2k+1 + \ldots}}}}}}$$ cqfd **(II)**

$$Fh(a+1;b;z)=Fh(a;b-1;z)-\frac{a-b+1}{b(b-1)}z.Fh(a+1;b+1;z) \quad \textbf{(2a)}$$

$$Fh(a;b;z)=Fh(a;b-1;z)-\frac{a}{b(b-1)}z.Fh(a+1;b+1;z) \quad \textbf{(2b)}$$

Dans **(2b)** on change ***b*** en ***b+1***
Dans **(2a)** on change ***b*** en ***b+2*** On obtient :

$$\frac{Fh(a;b;z)}{Fh(a;b+1;z)}=1+\frac{\left(\frac{az}{b(b+1)}\right)z}{\frac{Fh(a;b+1;z)}{Fh(a+1;b+2;z)}} \quad \textbf{(B')} \qquad \frac{Fh(a;b+1;z)}{Fh(a+1;b+2;z)}=1+\frac{\left(\frac{a-b-1}{(b+1)(b+2)}\right)z}{\frac{Fh(a+1;b+2;z)}{Fh(a+1;b+3;z)}} \quad \textbf{(A')}$$

En itérant par utilisation alternée des formules **B',A',B',A',B',A'…,** on obtient :

$$\frac{Fh(a;b;z)}{Fh(a;b+1;z)} = 1 + \cfrac{(a.z/b(b+1))z}{1 + \cfrac{((a-b-1)/(b+1)(b+2))z}{1 + \cfrac{((a+1)/b+2)(b+3))z}{1 + \cfrac{((a-b-2)/(b+3)(b+4))z}{1 + \ldots}}}}$$

On modifie avec la suite ***L=1,b+1,b+2,b+3…*** et on multiplie les 2 membres par ***b*** On obtient :

$$\frac{bFh(a;b;z)}{Fh(a;b+1;z)} = b + \cfrac{a.z}{b+1 + \cfrac{(a-b-1)z}{b+2 + \cfrac{(a+1)z}{b+3 + \cfrac{(a-b-2)z}{b+4 + \ldots + \cfrac{(a+k)z}{(b+2k-1)(b+2k) + \cfrac{(a-b-2k)z}{(b+2k) + \ldots}}}}}}$$ et en inversant

$$Fh(a;b+1;z)/b.Fh(a;b;z) = \cfrac{1}{b+ \cfrac{az}{b+1+ \cfrac{(a-b-1)z}{b+2 + \cfrac{(a+1)z}{b+3 + \cfrac{(a-b-2)z}{b+4 + \ldots + \cfrac{(a+k)z}{b+2k+1 + \cfrac{(a-b-k-1)z}{b+2k+2 + \ldots}}}}}}}$$

cqfd **(III)**

$$Fh(a,b;c-1;z)=Fh(a+1,b;c;z)-\frac{b(c-a-1)}{c(c-1)}z.Fh(a+1,b+1;c+1;z) \quad \textbf{(3a)}$$

$$Fh(a,b;c-1;z)=Fh(a,b+1;c;z)-\frac{a(c-b-1)}{c(c-1)}z.Fh(a+1,b+1;c+1;z) \quad \textbf{(3b)}$$

Dans **(3a)** on remplace ***c*** par ***c+1***. Dans **(3b)** on remplace ***a*** par ***a+1*** et ***c*** par ***c+1***. On obtient par division :

(C)

$$\frac{Fh(a,b;c;z)}{Fh(a+1,b;c+1;z)}=1+\frac{\left(\frac{(a-c)bz}{c(c+1)}\right)}{\frac{Fh(a+1,b,c+1;z)}{Fh(a+1,b+1;c+2;z)}}$$

(D)

$$\frac{Fh(a+1,b;c+1;z)}{Fh(a+1,b+1;c+2;z)}=1+\frac{\left(\frac{(b-c)(a+1)z}{c(c+1)}\right)}{\frac{Fh(a+1,b+1,c+2;z)}{Fh(a+2,b+1;c+2;z)}}$$

En itérant par utilisation alternée des formules **C,D,C,D,C,D,C,D,…,** on obtient :

$$\frac{Fh(a,b;c;z)}{Fh(a+1,b;c+1;z)} = 1+ \cfrac{\frac{(a-c)bz}{c(c+1)}}{1 + \cfrac{\frac{(b-c)(a+1)z}{(c+1)(c+2)}}{1 + \cfrac{\frac{(a-c-1)(b+1)z}{(c+2)(c+3)}}{1 + \cfrac{\frac{(b-c-2)(a+2)}{(c+3)(c+4)}}{1 +\ldots}}}}$$

Par modification utilisant la suite ***L=1,c,c+1,c+2,c+3,…*** et produit par ***c*** on obtient :

$$\frac{c.Fh(a,b;c;z)}{Fh(a+1,b;c+1;z)} = c + \frac{(a-c)bz}{|\ c+1} + \frac{(b-c-1)(a+1)z}{|\ c+2} + \frac{(a-c-1)(b+1)z}{|\ c+3} +\ldots$$

puis en inversant :_

$$\frac{Fh(a+1,b;c+1;z)}{c.Fh(a,b;c;z)} = \frac{1}{|c+} + \frac{(a-c)bz}{|\ c+1} + \frac{(b-c-1)(a+1)z}{|\ c+2} + \frac{(a-c-1)(b+1)z}{|\ c+3} + \frac{(b-c-2)(a+2)z}{|\ c+4} +\ldots$$

$$\ldots + \frac{(a-c-k)(b+k)z}{|\ c+2k+1} + \frac{(b-c-k-1)(a+k+1)z}{|\ c+2k+2} +\ldots$$

cqfd **(IV)**

En posant ***a=0 ,*** et en changeant ***b*** par ***b-1*** dans **(II)** et ***c*** par ***c-1*** dans **(IV)** on obtient les cas particuliers :

$$Fh(1;b;z) = \frac{1}{1+} + \frac{-z}{|\ b+} + \frac{z}{|b+1+} + \frac{-bz}{|b+2+} + \frac{2z}{|b+3+} + \frac{-(b+1)z}{|\ b+4} +\ldots + \frac{kz}{|b+2k-1+} + \frac{-(b+2k-3}{|\ b+2k} +\ldots$$

et

$$Fh(1,b;c;z) = \frac{1}{|1+} + \frac{-bz}{|\ c+} + \frac{(b-c)z}{|\ c+1+} + \frac{-c(b+1)z}{|\ c+2} +\ldots + \frac{-(c+k-1)(b+k)z}{|\ c+k} + \frac{(b-c-k)(k+1)z}{|\ c+k+1} +\ldots$$

cqfd **(IIa)** et **(IVa)**

III) DEVELOPPEMENTS DE FONCTIONS CLASSIQUES EN FRACTIONS CONTINUES

Ex1 : e^t (Euler) Utilisation du **Th24**

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} \Rightarrow c_k=\frac{1}{k!} \Rightarrow \frac{c_k}{c_{k-1}}=\frac{1}{k} \Rightarrow e^t=\left[\frac{1;1,1+\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t,\ldots,1+\left(\frac{c_k}{c_{k-1}}\right)t,\ldots}{c_1t,-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t,\ldots,-\left(\frac{c_k}{c_{k-1}}\right)t,\ldots}\right] \Rightarrow$$

$$e^t=\left[\frac{1;1,1+\left(\frac{1}{2}\right)t,\ldots,1+\left(\frac{1}{k}\right)t,\ldots}{t,-\left(\frac{1}{2}\right)t,\ldots,-\left(\frac{1}{k}\right)t,\ldots}\right]$$ **modification** avec la suite **s=1 1 2 3 4 5 … k …** (**th 11**) ⇒

$$e^t = 1 + \cfrac{t}{1+\cfrac{-t}{2+t+\cfrac{-2t}{3+t+\cfrac{-3t}{4+t+\cfrac{-4t}{5+t+\cfrac{-5t}{6+t+\ldots+\cfrac{-(k+1)t}{k+t+\ldots}}}}}}}$$

Ex2 : Log(1+x)= $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$ ⇒ $u_0=0$, $u_1=z$,… $u_k=z^k$

$a_0=u_0=0$, $a_1=1$, $b_1=z$, …et pour **k>1 :** $a_k=1+u_k/u_{k-1}=(k+(k-1)z)/k$, $b_k=-u_k/u_{k-1}=-z(k-1)/k$
Par modification avec la suite **L :** $L_0=1$, et pour **k>0 :** $L_k=k$ on obtient : $a_k=k+(k-1)z$, $b_k=-(k-1)^2z$

IV) FRACTIONS CONTINUES RÉGULIÈRES (FSR)

Pour tout k on a a_k et $b_k=1$ entiers (avec $a_k>0$ quand $k>0$). Donc P_k et Q_k entiers et R_k rationnel .

Th28 :

Dans une FCR les entiers P_k et Q_k sont premiers entre eux pour tout k.
Les suites (P_k) et (Q_k) pour $k>0$ sont strictement croissantes.
S'il y a une infinité d'étages, P_k et Q_k tendent vers l'infini quand k tend vers l'infini.

Démonstration :
La propriété (P2) $P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k-1}$ prouve que les couples (P_k,Q_k) et (P_{k-1},Q_{k-1}) sont premiers entre eux d'après le Th de Bezout. cqfd
$P_k-P_{k-1} = a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2} - P_{k-1} = (a_k-1)P_{k-1}+b_kP_{k-2} > 0$
$Q_k-Q_{k-1} = a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2} - P_{k-1} = (a_k-1)P_{k-1}+b_kP_{k-2} > 0$ donc les suites (P_k) **et** (Q_k) sont **strictement croissantes**
Ce sont des suites de nombres entiers, donc elles tendent vers l'**infini** s'il sagit d'une **FCSI** cqfd

Th29 : Algorithme de développement d'un nombre réel en FCR :

Soit **X** un nombre réel. On pose $a_0 = E(X) = \lfloor X \rfloor$ (le plus grand entier inférieur ou égal à **X**) et $r_0 = X-a_0 \in [0,1[$
puis $a_1 = \lfloor 1/r_0 \rfloor$ **et** $r_1=(1/r_0)-a_1 \in [0,1[$ **etc** $a_k = \lfloor 1/r_{k-1} \rfloor$, $r_k=(1/r_{k-1})-a_k$
Les a_k sont tous des entiers positifs sauf a_0 qui peut être un entier négatif ou nul.
On obtient $X=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots,a_{n-1},(a_n+r_n)]$ Ce peut être une **FCSF (**si un $r_n=0$**)** sinon c'est une **FCSI**
On a donc $X=a_0+\underset{k=1}{\overset{n}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$ ou $X=a_0+\underset{k=1}{\overset{\infty}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$
Si **X** est entier, l'expression se résume en $X=a_0$

Th30 :

CNS **(X rationnel)** $\Leftrightarrow\Rightarrow$ **(** $X = a_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$ **)** ***n*** entier >0

Démonstration :

Si $X = a_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$ $\Rightarrow$ X=a_0 + nb rationnel $\Rightarrow$ X est rationnel

Inversement :

Si X est rationnel il existe A et B entiers premiers entre eux tels que X=A/B

On aura $a_0 = \lfloor A/B \rfloor$ et $r_0 = (A/B)-a_0 = (A-Ba_0)/B = C_0/B$ $r_0 \in [0,1[$ $C_0<B$ C_0 entier

$a_1 = \lfloor B/C_0 \rfloor$ et $r_1 = (B/C_0)-a_1 = (B-C_0a_1)/C_0 = C_1/C_0$ $r_1 \in [0,1[$ $C_1<C_0$ C_1 entier

$a_2 = \lfloor C_0/C_1 \rfloor$ et $r_2 = (C_0/C_1)-a_2 = (C_0-C_1a_2)/C_1 = C_2/C_1$ $r_2 \in [0,1[$ $C_2<C_1$ C_2 entier

… $r_k=C_k/C_{k-1}$ or la suite d'entiers (C_k) est strictement décroissante donc en un nombre fini n d'étages on aura $C_n = 0$ et $r_n = 0$ cqfd

Th 31 : Résolution des équations diophantiennes linéaires

A.x + B.y = C ***A,B,C,x,y* entiers signés** **le PGCD de *A,B* divise *C***	$\Rightarrow$	**Les réduites de la FC régulière de *A/B* sont *R0,R1, … Rn-1,Rn*** **(** $R_n=P_n/Q_n=A/B$ **et** $R_{n-1}=P_{n-1}/Q_{n-1}$ **)** **Il y a une infinité de solutions (*t* : entier signé quelconque)** $x = C.Q_{n-1}.(-1)^{n-1} + B.t$ $y = C.P_{n-1}.(-1)^n - A.t$

Démonstration :

Soit x_0,y_0 une solution particulière (peu importe d'où elle vient). On a $Ax_0+By_0=C$, la solution générale vérifiant de même $Ax+By=C$.

L'équation sans second membre $AX+BY=0$ admet évidemment les solutions $Y/X = -A/B = (-At)/(Bt)$, ***t étant un paramètre arbitraire entier.*** On a donc $X=Bt$ et $Y=-At$

Les variables $x=X+x_0$ et $y=Y+y_0$ c'est-à-dire $x=x_0+B.t$ et $y=y_0-A.t$ constituent la solution générale de l'équation $Ax+By=C$.

La seule difficulté est de trouver une solution particulière ***x0,y0* .** Pour cela on utilise une ***FC régulière (FCR).***

Si $R_0,R_1,\ldots,R_{n-1},R_n$ sont les réduites de la ***FCR*** (*finie*) de ***A/B,*** on a $R_n=P_n/Q_n=A/B$ $R_{n-1}=P_{n-1}/Q_{n-1}$

On sait que si $k>1$ on a $P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^{k-1}$ En particulier : $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n-1} \Rightarrow AQ_{n-1}-BP_{n-1}=(-1)^{n-1}$

On multiplie par $(-1)^{n-1}C$ d'où $A.[C.Q_{n-1}.(-1)^{n-1}] + B.[- C.P_{n-1}.(-1)^{n-1}]=C$

Cela prouve que $x_0 = C.Q_{n-1}.(-1)^{n-1}$ et $y_0 = C.P_{n-1}.(-1)^n$ est une solution particulière cherchée cqfd

Définitions :

Une **FCR** est dite **« ultimement périodique »** si elle est infinie et si il existe **2** entiers $N\geq 0$ et $T\geq 1$ tels que :
$a_k = a_{k+T}$ pour tout $k\geq N$

Une **FCR** est dite **« purement périodique »** si de plus $N=0$

On notera une **FCR périodique :** $X=[a_0;a_1,\ldots,\{a_N,a_{N+1},\ldots,a_{N+T-1}\}]$ avec la suite finie périodique $\{a_N,a_{N+1},\ldots,a_{N+T-1}\}$

Un ***« irrationnel quadratique » (IQ)*** est un nombre réel irrationnel racine d'une équation du 2e degré (avec $\Delta>0$) à coefficients entiers (ou rationnels). Si ***X*** est « ***IQ*** », la 2e racine de son équation de degré ***2*** est appelée le « ***conjugué de X*** » ; il est aussi ***« IQ »)***

Remarque : Si ***X*** est racine de $Ax^2+Bx+C=0$ (où ***A,B,C*** rationnels) il existe ***A1,A2,B1,B2,C1,C2*** entiers tels que $A=A1/A2$ $B=B1/B2$ $C=C1/C2$ (fractions irréductibles). Posons $d=PPCM(A2,B2,C2)$ et multiplions notre équation par ***d.*** On obtient : $(d\,A)x^2+(d\,B)x+(d\,C)=0$ équation dont les coefficients sont entiers.

Th32 :

X et X* irrationnels quadratiques conjugués « IQC »	$\Leftarrow$CNS$\Rightarrow$	$X=R+S.D^{1/2}$, $X^*=R-S.D^{1/2}$ ***R et S rationnels, S≠0, D entier >0, D non carré***

Démonstration :

Une des racines de $Ax^2+Bx+C=0$ (où A,B,C entiers) est $X=(-B+\Delta^{1/2})/(2A)$ où $\Delta=B^2-4AC>0$
sa conjuguée est $X^*=(-B-\Delta^{1/2})/(2A)$. Ces racines sont de la forme $X=R+S.D^{1/2}$ et $X^*=R-S.D^{1/2}$
où D est entier>0, D n'est pas un carré, R et S sont rationnels, $S\neq0$. cqfd
Inversement, si $X=R+S.D^{1/2}$ et $X^*=R-S.D^{1/2}$ avec D entier>0, D non-carré, R et S rationnels, $S\neq0$;
Calculons les coefficients de l'équation $(x-X)(x-X^*)=0$
$(x-(R+S.D^{1/2}))(x-(R-S.D^{1/2}))=0 \Rightarrow x^2-2Rx+(R^2-S^2D)=0$ équation de degré **2** à coefficients rationnels qui admet **X et X*** comme racines**.** Donc **X et X*** sont « *IQC* » cqfd

Th33 :

X est un « IQ » *P,Q,H,K,R,D rationnels* *N entier>0 non carré parfait* $X=P+QN^{1/2}$ $X^*=P-QN^{1/2}$	⇒	$Y=X+H \rightarrow Y^*=X^*+H$ $Y=K/X \rightarrow Y^*=K/X^*$ $Y=HX+K \rightarrow Y^*=HX^*+K$ $Y=HX^2 \rightarrow Y^*=HX^{*2}$ $Y=K/(X+H) \rightarrow Y^*=K/(X^*+H)$ $Y=HX^2+KX+R \rightarrow Y^*=HX^{*2}+KX^*+R$

Démonstration :
X et X^* sont racines d'une équation $ax^2+bx+c=0$ et sont de la forme $X=P+QN^{1/2}$ $X^*=P-QN^{1/2}$
P et Q sont rationnels et N entier >0 non carré parfait.
$Y=X+H=(P+H)+QN^{1/2} \Rightarrow Y^*=(P+H)-QN^{1/2}=(P-QN^{1/2})+H=X^*+H$ cqfd
Posons $D=(P+QN^{1/2})(P-QN^{1/2})=P^2-Q^2N$
$Y=K/X=K/(P+QN^{1/2})=K(P-QN^{1/2})/D \Rightarrow Y^*=K/(P+QN^{1/2})/D=K/(P-QN^{1/2})=K/X^*$ cqfd
$Y=K/(X+H) \Rightarrow Y^*=K/(X+H)^*=K/(X^*+H)$ cqfd
$Y=HX+K=(HP+K)+HQN^{1/2} \Rightarrow Y^*=(HP+K)-HQN^{1/2}=HX^*+K$ cqfd
$Y=HX^2=H(P+QN^{1/2})^2=H((P^2+Q^2N)+2PQN^{1/2} \Rightarrow Y^*=H((P^2+Q^2N)-2PQN^{1/2}=H(P-QN^{1/2})^2=HX^{*2}$ cqfd

Th34 : (Lagrange)

(***X* irrationnel quadratique**) ⇐CNS⇒ ($X=a_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{K}}\left(\frac{1}{a_k}\right)$; **suite** (a_k) **ultimement périodique**)

Démonstration :
Si $X=[a_0;a_1,\ldots,a_{N-1},\{a_N,a_{N+1},\ldots,a_{N+T-1}\}]$ on a $x_N=[a_N,a_{N+1},\ldots,a_{N+T-1}+x_N]=(p'x_N+p'')/(q'x_N+q'')$ avec p',p'',q',q'' entiers
d'où $x_N(q'x_N+q'')=p'x_N+p'' \Rightarrow q'x_N^2+(q''-p')x_N-p''=0$ *(1)*
D'autre part, $X=(P_{N-1}x_N+P_{N-2})/(Q_{N-1}x_N+Q_{N-2}) \Rightarrow x_N=(P_{N-2}-Q_{N-2}X)/(Q_{N-1}X-P_{N-1})$ *(2)*
En injectant l'équation (2) dans l'équation (1) on obtient une expression de la forme
$AX^2+BX+C=0$ où A,B,C sont des entiers**.** Ce qui prouve que X est irrationnel quadratique cqfd
Inversement, soit ***X irrationnel quadratique*** solution d'une équation
$ax^2+bx+c=0$ à coefficients entiers avec $b^2-4ac>0$
Soit $n\geq2$ on a $X=(P_{n-1}x_n+P_{n-2})/(Q_{n-1}x_n+Q_{n-2})$ on en déduit :

$a((P_{n-1}x_n+P_{n-2})/(Q_{n-1}x_n+Q_{n-2}))^2+b(P_{n-1}x_n+P_{n-2})/(Q_{n-1}x_n+Q_{n-2})+c=0$ équivalent à :
$a(P_{n-1}x_n+P_{n-2})^2+b(P_{n-1}x_n+P_{n-2})/(Q_{n-1}x_n+Q_{n-2})+c(Q_{n-1}x_n+Q_{n-2})^2=0$ de la forme :

$A_nx_n^2+B_nx_n+C_n=0$ où (A_n,B_n,C_n) est un triplet d'entiers tels que :
$A_n=aP_{n-1}^2+bP_{n-1}Q_{n-1}+c_{n-1}Q_{n-1}^2$
$B_n=2aP_{n-1}P_{n-2}+b(P_{n-1}Q_{n-2}+P_{n-2}Q_{n-1})+2cQ_{n-1}Q_{n-2}$
$C_n=aP_{n-2}^2+bP_{n-2}Q_{n-2}+cQ_{n-2}^2=A_{n-1}$ on peut vérifier que $B_n^2-4A_nC_n=b^2-4ac>0$

Or $P_{n-1}=Q_{n-1}X+d_{n-1}/Q_{n-1}$ avec $|d_{n-1}|<1 \Rightarrow A_n=a(Q_{n-1}X+d_{n-1}/Q_{n-1})^2+b(Q_{n-1}X+d_{n-1}/Q_{n-1})+cQ_{n-1}^2$
$A_n=(aX^2+bX+c)Q_{n-1}^2+2aXd_{n-1}+a(dn\text{-}1^2/Qn\text{-}1^2)+bd_{n-1}$
$A_n=2aXdn\text{-}1+a(dn\text{-}1/Qn\text{-}1)^2+bd_{n-1} \Rightarrow |A_n|\leq2|aX|+|a|+|b|$

De même $P_{n-2}=Q_{n-2}X+d_{n-2}/Q_{n-2}$ avec $|d_{n-2}|<1$ … *(idem)* $\Rightarrow |C_n|=|A_{n-1}|\leq2|aX|+|a|+|b|$
D'autre part $B_n^2=4A_nC_n+b^2-4ac \Rightarrow |B_n|\leq B_n^2<4(2|aX|+|a|+|b|)^2+|b^2-4ac|$

On en déduit que $|A_n|,|B_n|,|C_n|$ sont des entiers inférieurs à un nombre fixé indépendant de n et par suite que le triplet (A_n,B_n,C_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières. Or n prend toutes les valeurs $n\geq 2$.
Donc il existe un triplet qui apparaît au moins 3 fois.
Soit un tel triplet $(A,B,C)=(A_i,B_i,C_i)=(A_j,B_j,C_j)=(A_k,B_k,C_k)$ pour $i<j<k$
On en déduit que x_i, x_j, x_k sont 3 solutions de l'équation $Ax^2+Bx+C=0$ qui n'en a que 2.
Donc il y en a 2 qui sont égales (supposons que $x_i=x_j$).
$x_i=[a_i ; a_{i+1}, a_{i+2}\ldots]$ $x_j=[a_j; a_{j+1}, a_{j+2}\ldots]$ sont 2 ***FCS*** représentant le même nombre (or cette ***FCS*** est unique)
D'où $a_i=a_j$ $a_{i+1}=a_{j+1}$ $a_{i+2}=a_{j+2}$ …. Et cette ***FCS*** de X irrationnel quadratique est ultimement périodique. cqfd

Définition :

(***X irrationnel quadratique réduit « IQR »***) ⇐**def**⇒ (***X irrationnel quadratique ; X>1, conjugué X* : -1<X*<0***)

Th35 :

N et Q entiers>0 ***N non-carré parfait***	⇒	***il existe un nombre fini d'irrationnels quadratiques réduits de la forme*** $X=(P+N^{1/2})/Q$ ***; P entier (P nécessairement >0)***

Démonstration :
$X=(P+N^{1/2})/Q$ est un irrationnel quadratique et son conjugué vérifie $X^*=(P-N^{1/2})/Q$ avec $X>1$ et $-1<X^*<0$
d'où $0<X+X^*=2P/Q$; $P>0$ (car $Q>0$) ; $P<N^{1/2}$ (car $X^*=(P-N^{1/2})/Q<0$) ; $Q<P+N^{1/2}$ (car $X=(P+N^{1/2})/Q>1$)
En résumé : $0<P<N^{1/2}$; $0<Q<P+N^{1/2}<2N^{1/2}$
Donc : N étant fixé et $Q>0$, P et Q ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs entières. cqfd

Th36 :

X irrationnel quadratique réduit $a_0=\lfloor X \rfloor$	⇒	$X=a_0+\frac{1}{X_1}$ ***X_1 irrationnel quadratique réduit***

Démonstration :
X est racine d'une équation de degré 2 à coefficients entiers : $ax^2+bx+c=0$ avec $a>0$ et $\Delta=b^2-4ac>0$.
Posons $a_0=\lfloor X \rfloor$, $X1=1/(X-a_0)$
On a donc $X=a_0+\frac{1}{X_1}$ ⇒ $a(a_0+1/X_1)^2+b(a_0+1/X_1)+c=0$ on multiplie par X_1^2 ⇒
$a(a_0X_1+1)^2+b(a_0X_1+1)+cX_1^2=0$ ⇒ $a(a_0^2X_1^2+2aa_0X_1+1)+b(a_0X_1^2+X_1)+cX_1^2)=0$ ⇒
$(aa_0^2+ba_0+c)X_1^2+(2aa_0+b)X_1+a=0$ ⇒ $a'X_1^2+b'X_1+c'=0$ avec :
$a'=aa_0^2+ba_0+c$; $b'=2aa_0+b$; $c'=a$
On a $b'^2-4a'c'=(2aa_0+b)^2-4(aa_0^2+ba_0+c)(a)=4a^2a_0^2+b^2+4aa_0b-4a^2a_0^2-4aa_0b-4ac=b^2-4ac>0$
$b'^2-4a'c'=b^2-4ac$ n'est pas un carré parfait. Donc $X1$ est « ***IQ*** ».
De plus, $a_0=E(X)$ Donc $0<X-a_0=1/X_1<1 \Rightarrow X_1>1$ Soient X^* et X_1^* les conjugués de X et X_1.
$X=a_0+1/X_1$ ⇒ $X^*=a_0+1/X_1^*$ ⇒ $X_1^*=1/(X^*-a_0)$
or $a_0\geq 1$ et $-1<X^*<0$ (car X est réduit) ⇒ $(X^*-a_0)<-1$ ⇒ $-1<X_1^*<0$ Donc $X1$ est « ***IQR*** » cqfd

TH37 : ***(E. Galois)***

X Irrationnel Quadratique Réduit (« IQR »)	⇐***CNS***⇒	***Fraction Continue Régulière de X purement périodique*** $X=[\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\}]$ ***et*** $(-1/X^*)=[\{a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\}]$ ***où X* est le conjugué de X***

Démonstration :
Soient $X=[\{a_0,a_1,\ldots a_{n-1},a_n\}]$ et $Y=[\{a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\}]$ 2 irrationnels quadratiques de ***FCR*** purement périodiques et de réduites Pk/Qk et Uk/Vk respectivement. On a $X>1$ et $Y>1$ car a_i ***entier*** >0 pour tout ***i.***
Propriétés précédemment démontrées :
$P_n/P_{n-1}=[a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0]=U_n/V_n$ et $Q_n/Q_{n-1}=[a_n,a_{n-1},\ldots,a_1]=U_{n-1}/V_{n-1}$
Ces fractions étant toutes irréductibles ⇒ $P_n=U_n$, $P_{n-1}=V_n$, $Q_n=U_{n-1}$, $Q_{n-1}=V_{n-1}$
FCR purement périodiques ⇒ $X=(P_nX+P_{n-1})/(Q_nX+Q_{n-1})$ et $Y=(U_nY+U_{n-1})/(V_nY+V_{n-1})$
d'où : $Q_nX^2+(Q_{n-1}-P_n)X-P_{n-1}=0$
$V_nY^2+(V_{n-1}-U_n)Y-U_{n-1}=0=P_{n-1}Y^2+(Q_{n-1}-P_n)Y-Q_n \Rightarrow Q_n(-1/Y)^2+(Q_{n-1}-P_n)(-1/Y)-P_{n-1}=0$
Donc X et $-1/Y$ sont racines de $Q_nx^2+(Q_{n-1}-P_n)x-P_{n-1}=0$ Elles sont distinctes car de signes contraires donc

conjuguées. De plus $-1<X^*=-1/Y<0$ $\Rightarrow X$ est Irrationnel Quadratique Réduit. cqfd

Réciproquement, soit X Irrationnel Quadratique Réduit. Par convention écrivons $X=X_0$

On sait que $X0=X=a_0+1/X_1$ avec $a_0=E(X)\geq 1$ et X_1 Irrationnel Quadratique Réduit $X>1$, $X_1>1$

De même $X_1=a_1+1/X_2$ $a_1=E(X_1)\geq 1$ X_2 Irrationnel Quadratique Réduit $X_2>1$ etc.… et pour tout n :

$$X= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{X_{n+1}}}}}}$$

X étant irrationnel, les suites $(X_k)_{k\geq 0}$ et $(a_k)_{k\geq 0}$ sont infinies

$X=(P+N^{1/2})/Q$ où N, P et Q entiers >0 , N non carré parfait

$X_n=(P_n+N^{1/2})/Q_n$, P_n et Q_n entiers >0 pour tout $n\geq 0$

Or on sait qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples (P,Q) quand N est fixé et X_n est « IQR » . Donc il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les X_n. Soit j le plus petit indice dont la valeur X_j soit déjà apparue dans la suite finie $X_0,X_1,\ldots,X_{j-1}$. Donc tous les $X_0,X_1,\ldots,X_{j-1}$ sont distincts et il existe un nombre k ($0\leq k\leq j-1$) tel que $X_k=X_j$

Montrons que la suite infinie $(X_n)_{n\geq 0}$ est périodique à partir du rang k.

$X_k=X_j \Rightarrow a_k+1/X_{k+1}=X_k=X_j=a_j+1/X_{j+1}$ et $a_k=E(X_k)=E(X_j)=a_j \Rightarrow X_{k+1}=X_{j+1}$

Par une récurrence immédiate on a pour tout $i\geq 0$: $X_{k+i}=X_{j+i}$

Donc la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est périodique à partir de l'ordre k.

Démontrons que $k=0$. On sait que $k\leq j-1$

Si $j=1 \Rightarrow k=0$ (évident)

Si $j>1$ supposons par l'absurde que $1\leq k\leq j-1$ et notons, pour tout **n,** X_n^* le conjugué de X_n

Puisque $X_{k-1}=a_{k-1}/X_k$ et $X_{j-1}=a_{j-1}+1/X_j \Rightarrow X_{k-1}^*=a_{k-1}/X_k^*$ et $X_{j-1}^*=a_{j-1}+1/X_j^*$

X_{k-1} et X_{j-1} étant réduits $\Rightarrow 0<-X_{k-1}^*=(-1/X_k^*)-a_{k-1}<1$ et $0<-X_{j-1}^*=(-1/X_j^*)-a_{j-1}<1$

Donc $a_{k-1}=E(-1/X_k^*)$ et $a_{j-1}=E(-1/X_j^*)$

Or $X_k=X_j \Rightarrow (-1/X_k^*)=(-1/X_j^*) \Rightarrow a_{k-1}=a_{j-1} \Rightarrow X_{k-1}=X_{j-1}$

ABSURDE car j est le plus petit indice ayant cette propriété Donc la supposition est absurde et $k=0$

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est donc purement périodique. cqfd

Si $X=[\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\}]$, on a de plus $Y=-1/X^*=[\{a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\}]$ cqfd

TH38 : ***cas d'une racine carrée (E. Galois)***

N entier>0 non carré parfait $X=N^{1/2}$	$\Rightarrow$	**FCR** de X ultimement périodique $X=[a_0,\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_3,a_2,a_1,2a_0\}]$

Démonstration :

X étant irrationnel quadratique, sa **FCR** sera infinie et ultimement périodique.

1) Démontrons que sa **FCR** est de la forme $X=[a_0,\{a_1,a_2,\ldots,a_n,2a_0\}]$ avec a_0 entier>0

On sait que $a_0=E(X)=E(N^{1/2})>0$ (car N entier>0 non carré parfait). Donc a_i entier>0 pour tout i.

On a $N^{1/2}>0 \Rightarrow Y=a_0+N^{1/2}>1$ et $0<N^{1/2}-a_0<1 \Rightarrow -1<Y^*=a_0-N^{1/2}<0$

Donc $Y=a_0+N^{1/2}$ est irrationnel quadratique réduit **(« IQR »)** et sa **FCR** est puremement périodique.

$Y=[\{2a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\}]=[2a_0,\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,2a_0\}]$ Or $X=N^{1/2}=Y-a_0=[a_0,\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,2a_0\}]$ cqfd

2) Démontrons la symétrie de la suite finie $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$

On a démontré $a0+N^{1/2}=[\{2a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\}]$ est réduit dont le conjugué est $a0-N^{1/2}$.

Le Th de **Galois** implique : $-1/(a_0-N^{1/2})=1/(N^{1/2}-a_0)=[\{a_n,a_{n-1},\ldots,a_2,a_1,2a_0\}]$ **(a)**

Or $N^{1/2}-a_0=[0,\{a_1,a_2,\ldots,a_n,2a_0\}]$ d'où $1/(N^{1/2}-a_0)=[\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,2a_0\}]$ **(b)**

En comparant les expressions (a) et (b) on trouve :

$a_n=a_1$, $a_{n-1}=a_2$…. Etc ce qui prouve la symétrie cherchée. cqfd

Remarque : L'existence d'un terme central dépend uniquement de la parité de la longueur de la période.

TABLEAU DES DEVELOPPEMENTS EN FCR DE $N^{1/2}$ $N^{1/2}=[x_0,\{x_1,x_2,\ldots,x_2,x_1,2x_0\}]$

N	x_0	Période	Conditions
j^2+1	j	2j	j≥1
j^2+2	j	J,2j	j≥1
j^2-1	j-1	1,2(j-1)	j≥2
j^2-2	j-1	1,j-2,1,2(j-1)	j≥3
j(j+1)	j	2,2j	j≥2
k^2j^2+k	jk	2j,2jk	j≥1 k≥2
k^2j^2+2k	jk	j,2jk	j≥1 k≥1
k^2j^2-k	jk-1	1,2(j-1),1,2(jk-1)	j≥3 k≥1
$4(4j^2+4j+3)$	4j+2	j,1,1,2j,1,1,j,2(4j+2)	j≥1
$(k(4j^2+1)+j)^2+4jk+1$	$j+k(4j^2+1)$	$2j,2j,2(j+k(4j^2+1))$	j≥1 k≥1
j(j+2)	j	1,2j	j≥1
j^2+2j/k	j	k,2j	j≥1 k≥1

Les 3 pages qui suivent concernent les développements des racines carrées des nombres **N** entiers **> 0** de **1** à **300** selon le modèle :

N^1r2=[x_0 { x_1 x_2 x_3 … x_3 x_2 x_1 2x_0 }]

Si **N** est un carré parfait (**$N=n^2$**), on a **N^1r2=[n { 0 }]**

On utilise le verbe ***fcsRCN*** pour faire ce travail

45 fcsRCN 1x +i.100x

1^0.5=[1 { 0 }]
2^0.5=[1 { 2 }]
3^0.5=[1 { 1 2 }]
4^0.5=[2 { 0 }]
5^0.5=[2 { 4 }]
6^0.5=[2 { 2 4 }]
7^0.5=[2 { 1 1 1 4 }]
8^0.5=[2 { 1 4 }]
9^0.5=[3 { 0 }]
10^0.5=[3 { 6 }]
11^0.5=[3 { 3 6 }]
12^0.5=[3 { 2 6 }]
13^0.5=[3 { 1 1 1 1 6 }]
14^0.5=[3 { 1 2 1 6 }]
15^0.5=[3 { 1 6 }]
16^0.5=[4 { 0 }]
17^0.5=[4 { 8 }]
18^0.5=[4 { 4 8 }]
19^0.5=[4 { 2 1 3 1 2 8 }]
20^0.5=[4 { 2 8 }]
21^0.5=[4 { 1 1 2 1 1 8 }]
22^0.5=[4 { 1 2 4 2 1 8 }]
23^0.5=[4 { 1 3 1 8 }]
24^0.5=[4 { 1 8 }]
25^0.5=[5 { 0 }]
26^0.5=[5 { 10 }]
27^0.5=[5 { 5 10 }]
28^0.5=[5 { 3 2 3 10 }]
29^0.5=[5 { 2 1 1 2 10 }]
30^0.5=[5 { 2 10 }]
31^0.5=[5 { 1 1 3 5 3 1 1 10 }]
32^0.5=[5 { 1 1 1 10 }]
33^0.5=[5 { 1 2 1 10 }]
34^0.5=[5 { 1 4 1 10 }]
35^0.5=[5 { 1 10 }]
36^0.5=[6 { 0 }]
37^0.5=[6 { 12 }]
38^0.5=[6 { 6 12 }]
39^0.5=[6 { 4 12 }]
40^0.5=[6 { 3 12 }]
41^0.5=[6 { 2 2 12 }]
42^0.5=[6 { 2 12 }]
43^0.5=[6 { 1 1 3 1 5 1 3 1 1 12 }]
44^0.5=[6 { 1 1 1 2 1 1 1 12 }]
45^0.5=[6 { 1 2 2 2 1 12 }]
46^0.5=[6 { 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1 12 }]
47^0.5=[6 { 1 5 1 12 }]
48^0.5=[6 { 1 12 }]
49^0.5=[7 { 0 }]
50^0.5=[7 { 14 }]
51^0.5=[7 { 7 14 }]
52^0.5=[7 { 4 1 2 1 4 14 }]
53^0.5=[7 { 3 1 1 3 14 }]
54^0.5=[7 { 2 1 6 1 2 14 }]
55^0.5=[7 { 2 2 2 14 }]
56^0.5=[7 { 2 14 }]
57^0.5=[7 { 1 1 4 1 1 14 }]
58^0.5=[7 { 1 1 1 1 1 1 14 }]
59^0.5=[7 { 1 2 7 2 1 14 }]
60^0.5=[7 { 1 2 1 14 }]
61^0.5=[7 { 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 }]
62^0.5=[7 { 1 6 1 14 }]
63^0.5=[7 { 1 14 }]
64^0.5=[8 { 0 }]
65^0.5=[8 { 16 }]
66^0.5=[8 { 8 16 }]
67^0.5=[8 { 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 }]
68^0.5=[8 { 4 16 }]
69^0.5=[8 { 3 3 1 4 1 3 3 16 }]
70^0.5=[8 { 2 1 2 1 2 16 }]
71^0.5=[8 { 2 2 1 7 1 2 2 16 }]
72^0.5=[8 { 2 16 }]
73^0.5=[8 { 1 1 5 5 1 1 16 }]
74^0.5=[8 { 1 1 1 1 16 }]
75^0.5=[8 { 1 1 1 16 }]
76^0.5=[8 { 1 2 1 1 5 4 5 1 1 2 1 16 }]
77^0.5=[8 { 1 3 2 3 1 16 }]
78^0.5=[8 { 1 4 1 16 }]
79^0.5=[8 { 1 7 1 16 }]
80^0.5=[8 { 1 16 }]
81^0.5=[9 { 0 }]
82^0.5=[9 { 18 }]
83^0.5=[9 { 9 18 }]
84^0.5=[9 { 6 18 }]
85^0.5=[9 { 4 1 1 4 18 }]
86^0.5=[9 { 3 1 1 1 8 1 1 1 3 18 }]
87^0.5=[9 { 3 18 }]
88^0.5=[9 { 2 1 1 1 2 18 }]
89^0.5=[9 { 2 3 3 2 18 }]
90^0.5=[9 { 2 18 }]
91^0.5=[9 { 1 1 5 1 5 1 1 18 }]
92^0.5=[9 { 1 1 2 4 2 1 1 18 }]
93^0.5=[9 { 1 1 1 4 6 4 1 1 1 18 }]
94^0.5=[9 { 1 2 3 1 1 5 1 8 1 5 1 1 3 2 1 18 }]
95^0.5=[9 { 1 2 1 18 }]
96^0.5=[9 { 1 3 1 18 }]
97^0.5=[9 { 1 5 1 1 1 1 1 1 5 1 18 }]
98^0.5=[9 { 1 8 1 18 }]
99^0.5=[9 { 1 18 }]
100^0.5=[10 {0}

101^0.5=[10 { 20 }]
102^0.5=[10 { 10 20 }]
103^0.5=[10 { 6 1 2 1 1 9 1 1 2 1 6 20 }]
104^0.5=[10 { 5 20 }]
105^0.5=[10 { 4 20 }]
106^0.5=[10 { 3 2 1 1 1 1 2 3 20 }]
107^0.5=[10 { 2 1 9 1 2 20 }]
108^0.5=[10 { 2 1 1 4 1 1 2 20 }]
109^0.5=[10 { 2 3 1 2 4 1 6 6 1 4 2 1 3 2 20 }]
110^0.5=[10 { 2 20 }]
111^0.5=[10 { 1 1 6 1 1 20 }]
112^0.5=[10 { 1 1 2 1 1 20 }]
113^0.5=[10 { 1 1 1 2 2 1 1 1 20 }]
114^0.5=[10 { 1 2 10 2 1 20 }]
115^0.5=[10 { 1 2 1 1 1 1 1 2 1 20 }]
116^0.5=[10 { 1 3 2 1 4 1 2 3 1 20 }]
117^0.5=[10 { 1 4 2 4 1 20 }]
118^0.5=[10 { 1 6 3 2 10 2 3 6 1 20 }]
119^0.5=[10 { 1 9 1 20 }]
120^0.5=[10 { 1 20 }]
121^0.5=[11
122^0.5=[11 { 22 }]
123^0.5=[11 { 11 22 }]
124^0.5=[11 { 7 2 1 1 1 3 1 4 1 3 1 1 1 2 7 22 }]
125^0.5=[11 { 5 1 1 5 22 }]
126^0.5=[11 { 4 2 4 22 }]
127^0.5=[11 { 3 1 2 2 7 11 7 2 2 1 3 22 }]
128^0.5=[11 { 3 5 3 22 }]
129^0.5=[11 { 2 1 3 1 6 1 3 1 2 22 }]
130^0.5=[11 { 2 2 22 }]
131^0.5=[11 { 2 4 11 4 2 22 }]
132^0.5=[11 { 2 22 }]
133^0.5=[11 { 1 1 7 5 1 1 1 2 1 1 1 5 7 1 1 22 }]
134^0.5=[11 { 1 1 2 1 3 1 10 1 3 1 2 1 1 22 }]
135^0.5=[11 { 1 1 1 1 1 1 1 1 22 }]
136^0.5=[11 { 1 1 1 22 }]
137^0.5=[11 { 1 2 2 1 1 2 2 1 22 }]
138^0.5=[11 { 1 2 1 22 }]
139^0.5=[11 { 1 3 1 3 7 1 1 2 11 2 1 1 7 3 1 3 1 22 }]
140^0.5=[11 { 1 4 1 22 }]
141^0.5=[11 { 1 6 1 22 }]
142^0.5=[11 { 1 10 1 22 }]
143^0.5=[11 { 1 22 }]
144^0.5=[12
145^0.5=[12 { 24 }]
146^0.5=[12 { 12 24 }]
147^0.5=[12 { 8 24 }]
148^0.5=[12 { 6 24 }]
149^0.5=[12 { 4 1 5 3 3 5 1 4 24 }]
150^0.5=[12 { 4 24 }]
151^0.5=[12 { 3 2 7 1 3 4 1 1 1 11 1 1 1 4 3 1 7 2 3 24 }]
152^0.5=[12 { 3 24 }]
153^0.5=[12 { 2 1 2 2 2 1 2 24 }]
154^0.5=[12 { 2 2 3 1 2 1 3 2 2 24 }]
155^0.5=[12 { 2 4 2 24 }]
156^0.5=[12 { 2 24 }]
157^0.5=[12 { 1 1 7 1 5 2 1 1 1 1 2 5 1 7 1 1 24 }]
158^0.5=[12 { 1 1 3 12 3 1 1 24 }]
159^0.5=[12 { 1 1 1 1 3 1 1 1 1 24 }]
160^0.5=[12 { 1 1 1 5 1 1 1 24 }]
161^0.5=[12 { 1 2 4 1 2 1 4 2 1 24 }]
162^0.5=[12 { 1 2 1 2 12 2 1 2 1 24 }]
163^0.5=[12 { 1 3 3 2 1 1 7 1 11 1 7 1 1 2 3 3 1 24 }]
164^0.5=[12 { 1 4 6 4 1 24 }]
165^0.5=[12 { 1 5 2 5 1 24 }]
166^0.5=[12 { 1 7 1 1 1 2 4 1 3 2 12 2 3 1 4 2 1 1 1 7 1 24 }]
167^0.5=[12 { 1 11 1 24 }]
168^0.5=[12 { 1 24 }]
169^0.5=[13
170^0.5=[13 { 26 }]
171^0.5=[13 { 13 26 }]
172^0.5=[13 { 8 1 2 2 1 1 3 6 3 1 1 2 2 1 8 26 }]
173^0.5=[13 { 6 1 1 6 26 }]
174^0.5=[13 { 5 4 5 26 }]
175^0.5=[13 { 4 2 1 2 4 26 }]
176^0.5=[13 { 3 1 3 26 }]
177^0.5=[13 { 3 3 2 8 2 3 3 26 }]
178^0.5=[13 { 2 1 12 1 2 26 }]
179^0.5=[13 { 2 1 1 1 3 5 13 5 3 1 1 1 2 26 }]
180^0.5=[13 { 2 2 2 26 }]
181^0.5=[13 { 2 4 1 8 6 1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 6 8 1 4 2 26 }]
182^0.5=[13 { 2 26 }]
183^0.5=[13 { 1 1 8 1 1 26 }]
184^0.5=[13 { 1 1 3 2 1 2 1 2 3 1 1 26 }]
185^0.5=[13 { 1 1 1 1 26 }]
186^0.5=[13 { 1 1 1 3 4 3 1 1 1 26 }]
187^0.5=[13 { 1 2 13 2 1 26 }]
188^0.5=[13 { 1 2 2 6 2 2 1 26 }]
189^0.5=[13 { 1 2 1 26 }]
190^0.5=[13 { 1 3 1 1 1 2 2 2 1 1 1 3 1 26 }]
191^0.5=[13 { 1 4 1 1 3 2 2 13 2 2 3 1 1 4 1 26 }]
192^0.5=[13 { 1 5 1 26 }]
193^0.5=[13 { 1 8 3 2 1 3 3 1 2 3 8 1 26 }]
194^0.5=[13 { 1 12 1 26 }]
195^0.5=[13 { 1 26 }]
196^0.5=[14
197^0.5=[14 { 28 }]
198^0.5=[14 { 14 28 }]
199^0.5=[14 { 9 2 1 2 2 5 4 1 1 13 1 1 4 5 2 2 1 2 9 28 }]
200^0.5=[14 { 7 28 }]

201^0.5=[14 { 5 1 1 1 2 1 8 1 2 1 1 1 5 28 }]
202^0.5=[14 { 4 1 2 2 1 4 28 }]
203^0.5=[14 { 4 28 }]
204^0.5=[14 { 3 1 1 6 1 1 3 28 }]
205^0.5=[14 { 3 6 1 4 1 6 3 28 }]
206^0.5=[14 { 2 1 5 14 5 1 2 28 }]
207^0.5=[14 { 2 1 1 2 1 1 2 28 }]
208^0.5=[14 { 2 2 1 2 2 28 }]
209^0.5=[14 { 2 5 3 2 3 5 2 28 }]
210^0.5=[14 { 2 28 }]
211^0.5=[14 { 1 1 9 5 1 2 2 1 1 4 3 1 13 1 3 4 1 1 2 2 1 5 9 1 1 28 }]
212^0.5=[14 { 1 1 3 1 1 1 6 1 1 1 3 1 1 28 }]
213^0.5=[14 { 1 1 2 6 1 8 1 6 2 1 1 28 }]
214^0.5=[14 { 1 1 1 2 3 1 4 9 1 1 5 3 14 3 5 1 1 9 4 1 3 2 1 1 1 28 }]
215^0.5=[14 { 1 1 1 28 }]
216^0.5=[14 { 1 2 3 2 1 28 }]
217^0.5=[14 { 1 2 1 2 1 1 9 4 9 1 1 2 1 2 1 28 }]
218^0.5=[14 { 1 3 3 1 28 }]
219^0.5=[14 { 1 3 1 28 }]
220^0.5=[14 { 1 4 1 28 }]
221^0.5=[14 { 1 6 2 6 1 28 }]
222^0.5=[14 { 1 8 1 28 }]
223^0.5=[14 { 1 13 1 28 }]
224^0.5=[14 { 1 28 }]
225^0.5=[15 { 0 }]
226^0.5=[15 { 30 }]
227^0.5=[15 { 15 30 }]
228^0.5=[15 { 10 30 }]
229^0.5=[15 { 7 1 1 7 30 }]
230^0.5=[15 { 6 30 }]
231^0.5=[15 { 5 30 }]
232^0.5=[15 { 4 3 7 3 4 30 }]
233^0.5=[15 { 3 1 3 1 1 1 1 3 1 3 30 }]
234^0.5=[15 { 3 2 1 2 1 2 3 30 }]
235^0.5=[15 { 3 30 }]
236^0.5=[15 { 2 1 3 5 1 6 1 5 3 1 2 30 }]
237^0.5=[15 { 2 1 1 7 10 7 1 1 2 30 }]
238^0.5=[15 { 2 2 1 14 1 2 2 30 }]
239^0.5=[15 { 2 5 1 2 4 15 4 2 1 5 2 30 }]
240^0.5=[15 { 2 30 }]
241^0.5=[15 { 1 1 9 1 5 3 3 1 1 3 3 5 1 9 1 1 22 1 30 }]
242^0.5=[15 { 1 1 3 1 14 1 3 1 1 30 }]
243^0.5=[15 { 1 1 2 3 15 3 2 1 1 30 }]
244^0.5=[15 { 1 1 1 1 1 2 1 5 1 1 9 1 6 1 9 1 1 5 1 1 1 1 1 30 }]
245^0.5=[15 { 1 1 1 7 6 7 1 1 1 30 }]
246^0.5=[15 { 1 2 5 1 14 1 5 2 1 30 }]
247^0.5=[15 { 1 2 1 1 9 1 9 1 1 2 1 30 }]
248^0.5=[15 { 1 2 1 30 }]
249^0.5=[15 { 1 3 1 1 5 1 3 10 3 1 5 1 1 3 1 30}]
250^0.5=[15 { 1 4 3 3 4 1 30}]
251^0.5=[15 { 1 5 2 1 2 2 15 2 2 1 2 5 1 30 }]
252^0.5=[15 { 1 6 1 30 }]
253^0.5=[15 { 1 9 1 1 1 2 1 7 4 2 2 2 4 7 1 2 1 1 1 9 1 30 }]
254^0.5=[15 { 1 14 1 30 }]
255^0.5=[15 { 1 30 }]
256^0.5=[16 { 0 }]
257^0.5=[16 { 32 }]
258^0.5=[16 { 16 32 }]
259^0.5=[16 { 10 1 2 3 4 3 2 1 10 32 }]
260^0.5=[16 { 8 32 }]
261^0.5=[16 { 6 2 3 7 1 3 1 2 1 3 1 7 3 2 6 3 2 2 2 34 2 12 1 5 32 }]
262^0.5=[16 { 5 2 1 2 1 10 16 10 1 2 1 2 5 32 }]
263^0.5=[16 { 4 1 1 1 1 15 1 1 1 1 4 32 }]
264^0.5=[16 { 4 32 }]
265^0.5=[16 { 3 1 1 2 2 1 1 3 32 }]
266^0.5=[16 { 3 4 3 32 }]
267^0.5=[16 { 2 1 15 1 2 32 }]
268^0.5=[16 { 2 1 2 3 3 1 3 1 10 8 10 1 3 1 3 3 2 1 2 32 }]
269^0.5=[16 { 2 2 32 }]
270^0.5=[16 { 2 3 6 3 2 32 }]
271^0.5=[16 { 2 6 10 1 4 1 1 2 1 2 1 15 1 2 1 2 1 1 4 1 10 6 2 32 }]
272^0.5=[16 { 2 32 }]
273^0.5=[16 { 1 1 10 1 1 32 }]
274^0.5=[16 { 1 1 4 4 1 1 32 }]
275^0.5=[16 { 1 1 2 1 1 32 }]
276^0.5=[16 { 1 1 1 1 2 2 2 1 1 1 1 32 }]
277^0.5=[16 { 1 1 1 4 10 1 7 2 2 3 3 2 2 7 1 10 4 1 1 1 32 }]
278^0.5=[16 { 1 2 16 2 1 32 }]
279^0.5=[16 { 1 2 2 1 2 2 1 32 }]
280^0.5=[16 { 1 2 1 2 1 32 }]
281^0.5=[16 { 1 3 4 1 1 6 6 1 1 4 3 1 32 }]
282^0.5=[16 { 1 3 1 4 1 3 1 32 }]
283^0.5=[16 { 1 4 1 1 1 3 10 1 15 1 10 3 1 1 1 4 1 32 }]
284^0.5=[16 { 1 5 1 3 2 1 4 8 4 1 2 3 1 5 1 32 }]
285^0.5=[16 { 1 7 2 7 1 32 }]
286^0.5=[16 { 1 10 3 3 2 3 3 10 1 32 }]
287^0.5=[16 { 1 15 1 32 }]
288^0.5=[16 { 1 32 }]
289^0.5=[17 { 0 }]
290^0.5=[17 { 34 }]
291^0.5=[17 { 17 34 }]
292^0.5=[17 { 11 2 1 3 8 3 1 2 11 34 }]
293^0.5=[17 { 8 1 1 8 34 }]
294^0.5=[17 { 6 1 4 1 6 34 }]
295^0.5=[17 { 5 1 2 3 2 6 2 3 2 1 5 34 }]
296^0.5=[17 { 4 1 7 1 4 34 }]
297^0.5=[17 { 4 3 1 1 2 1 1 3 4 34 }]
298^0.5=[17 { 3 1 4 5 1 1 5 4 1 3 34 }]
299^0.5=[17 { 3 2 3 34 }]
300^0.5=[17 { 3 8 3 34 }]

Th39 (dit des tiroirs de **DIRICHLET**) :

(X irrationnel) ⇒ (∀ Q entier >1 , ∃ un rationnel p/q ; 1≤q<Q ; |qX-p|≤1/Q)

Démonstration :

Soient **Q entier >1** et **X** réel **irrationnel ;** notons **n(y)=plus grand entier ≤ y**

Considérons les **Q+1 nombres** situés dans **[0,1] :**

0 , 1 , (X-n(X)) , (2X-(n(2X)) , (3x-n(3X)) ,…, ((Q-1)X-n((Q-1)X))

qui sont tous de la forme **aX-b** (**a,b entiers 0≤a≤Q-1**)

Divisons l'intervalle **[0,1]** en **Q sous-intervalles** de longueurs égales à **1/Q :**

[0,1/Q] [1/Q,2/Q] [2/Q,3/Q]...[(Q-1)/Q,1]

L'un des **Q** sous-intervalles contient **2** des **Q+1** nombres : soient $X_1=a_1X-b_1$ et $X_2=a_2X-b_2$ ces 2 nombres.

On peut supposer $a_1>a_2$. On a :

$1/Q \geq |X_1-X_2|=|(a_1-a_2)X-(b_1-b_2)|$ avec $a_1-a_2 \leq Q-1$

Posons $q=a_1-a_2$ et $p=b_1-b_2$ ⇒ On a $|qX-p| \leq 1/Q$ avec $1 \leq q < Q$ cqfd

Définition :

Approximation diophantienne d'un nombre réel X
C'est l'existence d'une suite infinie de rationnels (P_n/Q_n) et d'une fonction f telle que $f(t) \to 0$ si $t \to \infty$
et vérifiant ∀n : $0<|X-P_n/Q_n| \leq f(Q_n)$

Définition :

Bonne approximation diophantienne d'un nombre réel X
f doit vérifier : $(tf(t)) \to 0$ **si** $t \to \infty$
On a alors ∀n : $0<|X-P_n/Q_n| \leq \varepsilon(n)/Q_n$ où $\varepsilon(n) \to 0$ **si** $n \to \infty$

Th40

(X réel admet une bonne approximation diophantienne) ⇒ (X est irrationnel)

Démonstration :

Supposons (par l'absurde) qu'il existe un rationnel **(a/b)=X**

⇒ $0<|X-P_n/Q_n|=|a/b-P_n/Q_n| \leq \varepsilon(n)/Q_n$

⇒ $0<|aQ_n-bP_n| \leq b\varepsilon(n) \to 0$ or $|aQ_n-bP_n|$ est un **entier >0** Absurde ! cqfd

Th41 (de **DIRICHLET) :**

(X réel irrationnel) ⇒ (∃ une suite infinie de rationnels P_n/Q_n telle que $0 < |X-P_n/Q_n| < 1/Q_n^2$)

Démonstration :

On procède par récurrence.

Soit un entier **Q > 1.** D'après le th (des tiroirs), il existe un rationnel P_1/Q_1 tel que $1 \leq Q_1 < Q$ et

$0 < |X-P_1/Q_1| \leq 1/QQ_1$ donc $0 < |X-P_1/Q_1| < 1/Q_1^2$

On recommence en choisissant **Q** tel que $(1/Q) < |X-P_1/Q_1|$. De même il existe un rationnel P_2/Q_2 tel que

$1 \leq Q_2 < Q$ **et** $0 < |X-P_2/Q_2| \leq 1/QQ_2$ donc $0 < |X-P_2/Q_2| < 1/Q_2^2$

De plus, $P_1/Q_1 \neq P_2/Q_2$ car $|P_1/Q_1 - P_2/Q_2| \geq ||P_1/Q_1-X| - |P_2/Q_2-X|| \neq 0$ car $|P_1/Q_1-X| > 1/Q$ et

$|P_2/Q_2-X| \leq 1/QQ_2 \leq 1/Q$ ⇒ $|P_1/Q_1-X| > |P_2/Q_2-X|$

En pousuivant ce procédé, on construit une suite infinie P_n/Q_n de rationnels 2 à 2 distincts vérifiant

$|X-Pn/Q_n| < 1/Q_n^2$ cqfd

Th42 :

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k ; |t|<R \Rightarrow f^{(n)}(t)=n!\sum_{k=n}^{\infty} C_k^n c_k t^{k-n}$$ pour une ft holomorphe de rayon de convergence ***R***

$$f(t)=\sum_{k=0}^{N} c_k t^k \Rightarrow f^{(n)}(t)=n!\sum_{k=n}^{N} C_k^n c_k t^{k-n}$$ pour un polynôme de degré **N**

Démonstration :

$$f^{(n)}(t)=\sum_{k=n}^{N} k(k-1)(k-2)...(k-n+1)c_k t^{k-n} \quad \text{or} \quad k(k-1)(k-2)...(k-n+1)=n!\,C_k^n$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(t)=n!\sum_{k=n}^{\infty} C_k^n c_k t^{k-n} \quad \text{cqfd}$$

Cas particulier si **f** est un polynôme de degré **N** : $\boxed{f^{(n)}(t)=n!\sum_{k=n}^{N} C_k^n c_k t^{k-n}}$ pour $0 \le \mathbf{n} \le \mathbf{N}$ cqfd

Th43 (Formule de **HERMITE) :**

f étant un polynôme de degré **N**

$$\boxed{F(t)=\sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(t)} \Rightarrow \boxed{e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = F(0)e^x - F(x)}$$

Démonstration :

$$\left(e^{-t}F(t)\right)' = -e^{-t}\sum_{n=0}^{N} f^n(t) + e^{-t}\sum_{n=1}^{N+1} f^n(t) = -e^{-t}f(t) \quad \textbf{car} \quad f^{(N+1)}(t)=0 \quad \text{d'où en intégrant :}$$

$$\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = \left[-e^{-t}F(t)\right]_0^x = F(0) - e^{-x}F(x) \quad \text{et, en multipliant par } \mathbf{e^x}\textbf{ :}$$

$$e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt = F(0)e^x - F(x) \quad \textbf{cqfd}$$

Th44 (de **HERMITE) :**

e est un nombre transcendant

Démonstration :

Par l'absurde. **Supposons** que **e** soit algébrique de degré **d (d** entier **>0).** Il existe alors un polynôme de degré **d** à coefficients entiers $P(x)=\sum_{k=0}^{d} a_k \cdot x^k$ **(**avec $\mathbf{a_d}$**>0)** tel que $P(e)=\sum_{k=0}^{d} a_k \cdot e^k = 0$

Le polynôme $q(t)=t^{n-1}[(t-1)(t-2)...(t-d)]^n$ qui possède des coefficients entiers vérifie :
$q^{(i)}(0)=0$ *si=0,1,…,(n-2)* ; $q^{(n-1)}(0)=(-1)^{nd}(n-1)!(d!)^n$
$q^{(i)}(k)=0$ *si=0,1,…,(n-1)* et ***k=1,2,…,d***
Tous les coefficients de ***q(x)*** sont divisibles par ***(n-1)!*** et les coefficients d'ordre ≥ ***n*** par ***n!***

On choisit ***f(t) = q(x)/(n-1)!*** qui est donc à coefficients entiers de degré ***N=nd+n-1=(d+1)(n -1)+d*** avec les propriétés suivantes :
$f^{(i)}(0)=0$ si ***i=0,1,…,n-2)*** ; $f^{(n-1)}(0)=(-1)^{nd}(d!)^n$
$\mathbf{f^{(i)}(k)=0}$ si ***i=0,1,…,(n-1)*** et ***k=1,2,…,d***
Tous les coefficients de ***f(x)*** d'ordre ≥ ***n*** sont divisibles par ***n.*** On choisit ***n*** premier > ***d***

On utilise la formule de **HERMITE** (en faisant ***x=k*** où ***k=0,1,...d***) que l'on multiplie par a_k **.** On somme :

$$F(0)\sum_{k=0}^{d} a_k e^k - \sum_{k=0}^{d} F(k) = \sum_{k=0}^{d} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\,dt \quad \text{or} \quad \sum_{k=0}^{d} a_k e^k = 0 \quad \text{il reste :}$$

$$W_n = -\sum_{k=0}^{d} F(k) = \sum_{k=0}^{d} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\,dt$$ (***f*(t)** étant un polynôme de degré **N** à coefficients entiers) De plus :

$$F(0)=\sum_{i=n-1}^{N} f^{(i)}(0) = (-1)^{nd}(d!)^n + nA \quad , \; \textbf{\textit{A}} \text{ entier et } \quad F(k)=\sum_{i=n}^{N} f^{(i)}(k) = nB \quad , \; \textbf{\textit{B}} \text{ entier si } k > 0$$

Si ***n*** est un **nombre premier** tel que ***n > d*** et ***n > a_d , n*** ne divise pas ***F(0)*** mais divise ***F(k)*** pour ***k > 0***
Donc ***W_n est un entier différent de 0.***
D'autre part :

$$|W_n| = |\sum_{k=0}^{d} a_k e^k \int_0^k f(t) e^{-t}\, dt| \le \frac{d^N}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{d} \lfloor a_k \rfloor \int_0^k e^{k-t}\, dt \le \frac{d^{(d+1)(n-1)+d}}{(n-1)!} e^d \sum_{k=0}^{d} |a_k|$$

$$|W_n| \le \frac{(d^{d+1})^{n-1}}{(n-1)!} (de)^d \sum_{k=0}^{d} |a_k| = C \cdot \frac{D^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{où} \quad C = (de)^d \sum_{k=0}^{d} |a_k| = cste \quad \text{et} \quad D = d^{d+1} = cste$$

Donc ***W_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.***

ABSURDE : un entier différent de 0 ne peut tendre vers 0 . cqfd.

Th45 (de **HERMITE-LINDEMANN) :**

(X algébrique réel ou complexe non nul) ⇒ (e^X transcendant)

La démonstration est admise car elle est volumineuse !

Th46 : (résultat de la théorie des anneaux et des corps)

L'ensemble des nombres algébriques réels ou complèxes muni de la somme et du produit a une structure de corps commutatif.

Th47 (de **LINDEMANN**) **:**

π est un nombre transcendant

Démonstration :
Par l'absurde. **Supposons π algébrique. i est algébrique** (racine de $x^2+1=0$) ⇒ **iπ est algébrique** (produit de 2 nombres algébriques) ⇒ **$e^{i\pi}$ est transcendant** (d'après le th de HERMITE-LINDEMANN)
Or **$e^{i\pi}$ =_1** (racine de x+1=0) ⇒ **$e^{i\pi}$ est algébrique ! ABSURDE !** cqfd

V) SCRIPT
NB. **FRACTCONT.ijs**

```
require '~user/devseries.ijs'
```

NB. ***REPRESENTATION D'UN NOMBRE PAR UNE FRACTION CONTINUE***

NB. ***FCS (simple) du nb réel ou complexe y en N niveaux (au plus)***
NB. ***R =. N nb2fcs y***
NB. ***R =. _ nb2fcs y***
```
nb2fcs =:{{R=.i.j=.0 [ z=.1 [ w=.y while.(x>:j=.>:j)*.(z~:0) do. R=.R,z=.<.w if. 0~:z=.w-z do. w=.%z end.end.
R}}"0 0
```

NB. ***VALEUR NUMÉRIQUE D UNE FC***
NB. ***R =. fcval a*** (pour une FCS)
NB. ***R =. b fcval a*** ou ***R =. fcval b;a*** (pour une FCG)
NB. ***R =. z fcval a*** (avec z nb réel ou complexe fixé)
```
fcval =: fc2nb =: {()v
if. y-:>y do. R=.(+%)/y else. R=.b fcval a [ 'b a'=.y end. R
:
if. 1=#x do. R=.+`%/}:,y,.x else. N=.(#x)<.(#y=.}.y) [ z=.{.y
R=.+`%/z,,(N{.x),.(N{.y) end. R }}"_ _ _
```

NB. ***RÉDUITES D'UNE FC***
NB. a=a0 a1 ...an b=.b1 b2 ...bn
NB. R=.R0 R1...Rn Rn
NB. ***R=. reduites a*** NB. pour une FCS
NB. ***R=. b reduites a*** NB. pour une FCG
```
reduites=:{()v
(+%)/\y
:
((#x,y)$1 0)#(+`%)/\}:,y,.x,0x}}
```

NB. ***FCS d'UN NOMBRE QUADRATIQUE (période entre { ... })***

NB. ***Devt en FCS de N^1r2 où N=entier >0***

NB. ***a =. fcsRCN N***

NB. ***a =. nb fcsRCN N***

```
fcsRCN=:{{)v
50x fcsRCN y
:
a=.a{.~>:j=.a i.f=.+:a0=.0{a=.x: x nb2fcs Z=.%:N=.x:y
(":y),'^0.5=[',(":a0),' { ',(":}.a),' }]' }}"0 0 0
```

NB. ***FCS de K+H*N^1r2***

NB. N entier >0, H et K entiers ou rationnels

NB. ***R=. fcsKPHRCN K,H,N***

NB. ***R=. nb fcsKPHRCN K,H,N***

```
fcsKPHRCN =:{{)v
50 fcsKPHRCN y
:
'k h N'=.'k0 h0 N'=.x:y
A=.H=.K=.i.0x [I=.i.x [RCN=.%:N
for_i. I do.a=.<.k+h*RCN
'h1 k1'=.(h,a-k)%(N**:h)-*:a-k
A=.A,a [K=.K,k1 [ H=.H,h1
k=.k1 [ h=.h1 end.
Z=.|:A,H,:K [ J=.}.I [t=.0
for_j. J do. I=.i.j
for_i. I do.if.(t=0)*.*./(i{Z)=(j{Z)do. t=.1
'i0 j0'=.i,<:j break. end. end. end.
(":k0),'+',(":h0),'*',(":N),'^0.5=[',(":(i.i0){A),' { ',(":(i0+i.>:j0-i0){A),' }]'
}}"1 0 1
```

NB. *SERIE NUMERIQUE ⇐⇒ FCS*

NB. ***Dev en serie d une FT ⇒ dev de la FT sous forme de FCS***
NB. (ou avec bn = z fixé pour tout n) par inversion de séries
NB. a =. a0 a1 a2 ...an
NB. S : coeff du dev en série de Maclaurin d une ft
NB. a : coeff du dev en fraction continue simple (FCS)
NB. On doit avoir : (+/S) = (fcval a)
NB. et (+/S*z^i.#S) = (z fcval a)
NB. ***a =. s2fcs S***
s2fcs=:{{r=.0$w=.y while. 1<#w do. w=.sinv}.w[r=.r,{.w end. r,w }}"_

NB. ***FCS d'une FT ⇒SÉRIE de Maclaurin de la FT***
NB. On doit avoir : (+/S)=(fcval a) et (+/S*z^i.#S) = (z fcval A)
NB. ***S =. fcs2s a***
fcs2s =: {{a=.}:a[Q=.1x[P=.{:a=.x: y while. 0<#a do. a=.}:a[Q=.Z [P=.(({:a)*Z=.P,0x)+0x,Q end. P squo Q}}

NB. ***fc à partir de s (série numérique) ou s(z) (série entière)***
NB. On doit avoir (b fcval a)=(+/s) ou (b fcval a)=(+/s*z^i.#s)
NB. ***'b a'=. s2fc1 s*** ou ***'b a'=. z s2fc1 s***
s2fc1 =: {{)v
(d1,-d2,(2}.c)*_2}.c);d0,1x,(}:c)+}.c=.}.y['d0 d1 d2'=.3{.y
:
(x*d1,-d2,(_2}.c)*(2}.c));d0,1x,(}:c)+x*}.c=.}.y['d0 d1 d2'=.3{.y}}

NB. ***fc à partir de s (série numérique) ou s(z) (dev en série)***
NB. On doit avoir (b fcval a)=(+/s) ou (b fcval a)=(+/s*z^i.#s)
NB. ***'b a'=. s2fc2 s*** ou ***'b a'=. z s2fc2 s***
s2fc2 =: {{)v
(d1,-c);(d0,1x,1x+}.c=.1x,(}:c)%}.c=.}.y)['d0 d1'=.2{.y
:
(x*d1,-c);(d0,1x,1x+x*c=.(}.c)%}:c=.}.y)['d0 d1'=.2{.y}}

NB. ***idem***
NB. On doit avoir (b fcval a)=(+/s%!i.#S) ou (b fcval a)=(+/(s%!i.#s)*z^i.#s)
NB. (+/sn%!n) ou (+/(sn%!n)*Z^n)
NB. ***'b a'=. s2fc3 s*** ou ***'b a'=.z s2fc3 s***
s2fc3 =: {{)v
(d1,-d2,(_2}.c2)*2}.c);d0,1x,(}.c)+}:c2=.(2x+i.#c)*c=.}.y['d0 d1 d2'=.3{.y
:
(x*d1,-d2,(_2}.c2)*2}.c);d0,1x,(x*}.c)+}:c2=.(2x+i.#c)*c=.}.y['d0 d1 d2'=.3{.y}}

NB. ***idem***
NB. On doit avoir (b fcval a)=(+/s%!i.#s) ou (b fcval a)=(+/(s%!i.#s)*z^i.#s)
NB. (+/sn/n!) ou (+/(sn/n!)*Z^n)
NB. ***'b a'=. s2fc4 s*** ou ***'b a'=.z s2fc4 s***
s2fc4 =: {{
(d1,-(1x+i.#c)*c);d0,1x,(2x+i.#c)+c=.(}.c)%}:c=.}.y['d0 d1'=.2{.y
:
(x*d1,-(1x+i.#c)*c);d0,1x,(2x+i.#c)+x*c=.(}.c)%}:c=.}.y['d0 d1'=.2{.y}}

NB. OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS CONTINUES SIMPLES a

NB. ***SOMME***

NB. ***a =. a1 somfcs a2***

```
somfcs =: 30"_ nb2fcs ([: fcval [)+([: fcval ])
```

NB. ***PRODUIT***

NB. ***a =. a1 profcs a2***

```
profcs =: 30"_ nb2fcs ([: fcval [)*([: fcval ])
```

NB. ***SOUSTRACTION***

NB. ***a =. a1 soufcs a2***

```
soufcs =: 30"_ nb2fcs ([: fcval [)-([: fcval ])
```

NB. ***QUOTIENT***

NB. ***a =. a1 quofcs a2***

```
quofcs =: 30"_ nb2fcs ([: fcval [)%([: fcval ])
```

NB. ***INVERSE***

NB. ***a =. invfcs a2***

```
invfcs =: 30"_ nb2fcs %@:([: fcval ])
```

NB. ***PUISSANCE y***

NB. ***a =. a1 puifcs y***

```
puifcs =: 30"_ nb2fcs ([: fcval [)^]
```

NB. ***MODIFICATION PAR UNE SUITE NUMERIQUE L***

NB. ***Modification par produit de a par la suite L***

NB. Il faut 1={.L On doit avoir : (bb fcval aa)=(b fcval a)

NB. ***'bb aa'=. L fcmodif b;a***

fcmodif =: {{((N$b)*(}:L)*}.L);((N+1)$a)*L=.(N+1)$x[N=.(<:#a)<.(#b)<.(<:#x)['b a'=.y}}

NB. ***Modif fc --> fcs (simple : avec bb=1 1 1 1 ...)***

NB. On doit avoir (fcval aa)=(b fcval a)

NB. ***aa =. b fc2fcs a***

fc2fcs =: {{I=.i.#x [L=.,1x for_i. I do. L=.L,%(i{L)*i{x end. >1{L fcmodif x;y}}

NB. ***Modif où aa=. a0,1 1 1 1 ....***

NB. On doit avoir (bb fcval aa)=(b fcval a)

NB. avec aa=a0,1 1 1 1 1 ....

NB. ***'bb aa' =.b fcmodifAeg1 a***

fcmodifAeg1 =:{{(1x,%}.y) fcmodif x;y}}

NB. ***REDUCTION DES ETAGES (ou itérations)***

NB. ***Réduction de 2 itérations en partant de la 1e***

NB. On doit avoir (bb fcval aa)=(b fcval a)

NB. ***'bb aa'=. b fcr2d1 a***

fcr2d1 =: {{)d

if. 1=2|N=.(<:#y)<.(#x) do.N=.<:N end.
'A1 A2'=.|:(N1,2)N}.y['B1 B2'=.|:((N1=.-:N),2)Nx
(-U*W);(({.y)+{.U),(}:A2+W)+}.U=.B1%A1 [W=.B2%A1}}

NB. ***Réduction de 2 itérations en partant de la 2e***

NB. On doit avoir (b1 fcval a1)=(b fcval a)

NB. ***'b1 a1'=. b fcr2d2 a***

fcr2d2 =: {{(b1,B);a0,A['B A'=.B1 fcr2d1 A1[a0=.{.y[b1=.{.x[A1=.}.y[B1=.}.x}}

NB. ***Réduction de 3 itérations en partant de la 1ere***

NB. On doit avoir (b1 fcval a1)=(b fcval a)

NB. ***'b1 a1'=. b fcr3d1 a***

fcr3d1 =: {{)d

B1=.i.0x[A1=.(1 2{B) fcval 3{.A[I=.i.K0=.<.1r3*_3x+K=.(#B=.0x,x)<.(#A=.y)
for_i. I do. 'a1 a2 a3 a4 a5'=.(1 2 3 4 5+3*i){A
'b1 b2 b3 b4 b5'=.(1 2 3 4 5+3*i){B
Y=.(b3,b2) fcval (a3,a2,a1)[Z=.b1*(b3+a2*a3)%(b2+a1*a2)
A1=.A1,(b4,b5) fcval (Y,a4,a5) [B1=.B1,((-Y*b1),b2) fcval (Z,a1,a2) end. B1;A1 }}

NB. ***Réduction de 3 itérations en partant de la 2e***

NB. On doit avoir (b1 fcval a1)=(b fcval a)

NB. ***'bb aa'=. b fcr3d2 a***

fcr3d2 =:{{(({.x),B);({.y),A ['B A'=.(}.x) fcr3d1 }.y}}

NB. ***Réduction de 3 itérations en partant de la 3e***

NB. On doit avoir (bb fcval aa)=(b fcval a)

NB. ***'bb aa'=. b fcr3d3 a***

fcr3d3 =:{{((2{.x),B);(2{.y),A ['B A'=.(2}.x) fcr3d1 2}.y}}

NB. SERIE ENTIERE ==> FRACTION CONTINUE D'ÉLÉMENTS POLYNOMIAUX

NB. ***s(z) ==> FC de polynomes unitaires (degré N fixé)***
NB. s(z)=A0(z)+(z^N+1)
NB. ----------
NB. A1(z) +(z^N+1)
NB. ----------
NB. A2(z) +(z^N+1) etc
NB. où A0,A1,A2 ... = suite de polynomes de degré m
NB. N = degré souhaité des polynomes de A (entier positif ou nul)
NB. Tous les polynômes de B égaux à z^N+1
NB. s, s1, s2 : séries réelles ou complexes
NB. Si s1;s2 il y a d abord calcul du quotient s=.s1/s2
NB. B,A : matrices de coef des polynomes (un par ligne)
NB. ***'B A' =. N s2fcpol s*** ou ***'B A' =. N s2fcpol s1;s2***

```
s2fcpol =: {{)d
if. y-:>y do. s=.y else. s=.s1 squo s2 [ 's1 s2'=.y end.
A=.(0,N=.x+1x)$0x while. N<:#s do. s=.N}.s [ A=.A,N{.s
if. N<:#s do. s =.sinv s end. end. ((((<:#A),N)$0x),.1x);A }}"0 _
```

NB. ***idem***
NB. s,s1,s2 sont des developpements en séries
NB. A et B sont des matrices de coeff de polynômes
NB. B
NB. la k ieme ligne de A contient les 2^k composantes d'un polynôme de degré (2^k)-1
NB. ***'B A' =. s2fcpol2 s*** ou ***'B A' =. s2fcprog s1;s2*** NB. TOUT BON

```
s2fcpol2 =: {{)m
if. y-:>y do. S=.y else.S=.S1 sdiv S2['S1 S2'=.>y end.
S=.}.S[A=.<{.S[i=.1[B=.i.0
while. (#S)>:i=.(j=.i)*2 do.B=.B,<(j#0x),1x [ S=.i}.S[A=.A,<i {.S=.sinv S end. (>B);(>A)}}"_
```

NB. **Valeur d une fcpol**
NB. B,A : matrices de coef des polynomes
NB. z réel ou complexe
NB. ***R =. z fcpolval B;A***

```
fcpolval =: {{fcval (B&p. x);(A&p. x) [ 'B A' =.y}}"0 _
```

NB. ***FC D'INTERPOLATION A ELEMENTS POLYNOMIAUX***

NB. ***FC d'interpolation passant par N+1 points (xi,yi) i=0 1 2...N***
NB. X=N+1 abscisses distinctes ;Y=N+1 ordonnees correspondantes
NB. A=coeffts de la fraction continue d'interpolation
NB. ***'X A' =. X fcinterp Y***
fcinterp =: {{N=.#x[k=.0[A=.,{.y while. N>k=.k+1 do. A=.A,((|.(k{x)-k{.x),k{y) fcval 0x,(-|.A),1x end. x;A}}

NB. ***Valeurs d'une fraction continue d'interpolation :***
NB. X et A sont définis dans fcinterp
NB. ***'y1 y2 y3 ...yp' =.(X;A) fcintval x1 x2 x3 ...xp***
fcintval =: {{(y-X) fcval A ['X A'=.x}}"_ 0

NB. ***Polynômes dont le quotient est une Fonction rationnelle d interpolation***
NB. X;A proviennent de ('X A'=. X fcinterp Y)
NB. ***'p q'=. polfrat X;A***
polfrat =: {{)m
k=.N=.#X[p=.q=.,1x [j=.2 ['X A'=.y
while.0<:k=.k-1 do.r=.((k{A)*j{.p)+(j{.0x,q)-(k{X)*j{.q,0x
j=.(1+#q)>.#p=.r[q=.p end. p;q }}

NB. ***Polynômes dont le quotient est une ft rationnelle***
NB. ***passant par les points d'interpolation (X,Y)***
NB. ***'p q'=. X pfrat Y***
pfrat =: polfrat@([fcinterp])

NB. ***Valeur d'une fonction rationnelle définie par (p;q)***
NB. ***'y1 y2 ... yp'=. (p;q) fratval x1 x2 ... xp***
fratval =: ((>@{.@[)p.])%((>@{:@[)p.])"_ 0

NB. ***Fonction rationnelle d'interpolation aux abscisses x0 x1...xN***
NB. ***fi=: y0 y1...yN FRI x0 x1...xN*** NB. si on connait les ordonnées
NB. ***fi=: f FRI x0 x1...xN*** NB. si on connait la fonction f
FRI=:{{)c
X=.n if. 3=NAT <'u' do. Y=.(u"0) X else. Y=.m end. 'P Q'=. X pfrat Y
P&p.%Q&p. }}

NB. ***EQUATIONS DIOPHANTIENNES***

NB. ***Résolution en nombres entiers relatifs de : (a*X)+(b*Y)=c***
NB. *a,b,c étant des entiers relatifs*
NB. Résultat sous forme de texte "X=.X0+b*T" "Y=.Y0-a*T"
NB. T étant entier relatif quelconque; X0,Y0 entiers relatifs
NB. Il faut que d=PGCD(a,b) divise c sinon c est remplacé :
NB. par (le plus grand multiple de d)<:c si x=0
NB. par (le plus petit multiple de d)>:c si x=1
NB. ***x LdiophanteZ a,b,c***

```
LdiophanteZ=:{{)d
d=.a+.b [ 'a b c'=.x: y
if. 0~:r=.d|c do. if. x=0 do. c=.c-r else.c=.c+d-r end. end.
s=._1x^#A ['p q'=.x: ND fcval }:A =. _ nb2fcs a%b [ c=.(c1=.c)%d
R=.' (',(":a),'*X) + (',(":b),'*Y) = ',(":c1) [ csq=.c*s*q [ csp=.c*s*p
R;(' X=.',(":csq),'+',(":b),'*T'),:(' Y=.',(":-csp),'-',(":a),'*T') }}

LdiophanteN=:{{)d
d=.a+.b [ 'a b c'=.x: y
if. 0~:r=.d|c do. if. x=0 do. c=.c-r else.c=.c+d-r end. end.
s=._1x^#A ['p q'=.x: ND fcval }:A =. _ nb2fcs a%b [ c=.(c1=.c)%d
T=.T1+i.>:T2-T1 [ T1=.>.(-X0%b) [ T2=.<.Y0%a [ X0=.c*s*q [ Y0=.-c*s*p
R=.(' (',(":a),'*X) + (',(":b),'*Y) = ',(":c1)),:((":T1),' <: T <: ',(":T2))
R=.R,:(' X=.',(":X0),'+',(":b),'*T'),:(' Y=.',(":Y0),'-',(":a),'*T')
(<R),.<(X=.X0+b*T),.(Y=.Y0-a*T) }}
```

```
Pell=:{{)d
'D c'=.x: y [ K=.i. x: x [ R=.0 2$0x
i=.<:A i.+:{.A=.x: 15x nb2fcs %:D
M0=.M=.x:2 2$p,(q*D),q,p [ 'p q'=.x: ND i{x: reduites A
for_k. K do.M=.M+/ .*M0 [ R=.R,|.1{M end. ('M';'X,Y'),:(M0;R)}}
```

NB. ***Algorithme QD1***
NB. FC polynomiale issue de la série de Mac-Laurin de coeff. c
NB. B et A 2 matrices de polynômes (de degrés 0 pour A, 1 pour B)
NB. ***'B A'=. QD1 c***

```
QD1=:{{)m
q=.(d,0)1}q=.e=.(1 0+2$>:N)$0x [ J=.1}.K=.i.>:N=.#d=.(1}.c)%_1}.c=.x:y
for_j. J do.K=._1}.K
for_k.K do. e=.(((<(<:j);>:k){e)+((<j;>:k){q)-((<j;k){q))(<j;k)}e end.
if.1<:#K do. for_k.K do. q=.(((<j;>:k){e)*((<j;>:k){q)%(<j;k){e) (<(>:j);k)}q end.end.end.
a=.,.0x,(#b)$1x [ b=.((0{c),0x), 0x,.,-(}.,(<K;0){q),.}.,(<K;0){e [ K=.i.N
((#c){.b);((>:#c){.a) }}
```

NB. ***utilisation de l'algorithme QD1***

NB. m=0 (ft ni paire ni impaire)
NB. m=1 (c coeff impairs d'une ft impaire)
NB. m=2 (c coeffts pairs d'une ft paire)
NB. fr : nom souhaité pour la ft rationnelle NB. Tout bon
NB. ***fr=: m s2frat1 c***

```
s2frat1=:{{)c
'p q'=.fcpol2frat QD1 n
select. m
case. 0 do. p&p.%q&p.
case. 1 do. *((p&p.%q&p.)@*:)
case. 2 do. (p&p.%q&p.)@:*: end. }}
```

NB. ***Algorithme QD2***

NB. FC polynomiale issue de la série de Mac-Laurin de coeff. c
NB. B et A 2 matrices de polynômes (de degrés 1 pour A, 2 pour B)
NB. ***'B A'=. QD2 c***

```
QD2=:{{)m
N=.<.-:N [ q=.(d,0)1}q=.e=.(1 0+2$>:N)$0x [ J=.1}.K=.i.>:N=.#d=.(1}.c)%_1}.c=.x:y
for_j. J do.K=._1}.K
for_k.K do. e=.(((<(<:j);>:k){e)+((<j;>:k){q)-((<j;k){q))(<j;k)}e end.
if.1<:#K do. for_k.K do. q=.(((<j;>:k){e)*((<j;>:k){q)%(<j;k){e) (<(>:j);k)}q end.end.end.
b=.(<:#a){.((0{c),0x 0),0x,.0x,.-}.(0{|:e)*(0{|:q) [ a=.0x,1x,.-(}:0{|:e)+(}.0{|:q)
(N{.b);((>:N){.a)}}
```

NB. ***Fonction rationnelle fr issue d'une série de Mac-Laurin de coeff. c***

NB. ***utilisation de l'algorithme QD2***

NB. m=0 (ft ni paire ni impaire)
NB. m=1 (c coeff impairs d'une ft impaire)
NB. m=2 (c coeffts pairs d'une ft paire)
NB. fr : nom souhaité pour la ft rationnelle NB. Tout bon
NB. ***fr=: m s2frat2 c***

```
s2frat2=:{{)c
'p q'=.fcpol2frat QD2 n
select. m
case. 0 do. p&p.%q&p.
case. 1 do. *((p&p.%q&p.)@*:)
case. 2 do. (p&p.%q&p.)@:*: end. }}
```

NB. **Réduites polynomiales**

NB. ***'P Q'=. redpol B;A***

```
redpol=:{{)m
p1=.(1{b)paddi q1 pprod p0=.0{a [ q0=.1x [ q1=.1{a [ b=.0x,b [ 'b a'=.y
P=.p0;p1 [ Q=.q0;q1 [ K=.2x+i._3x+#a
for_k. K do. p2=.((k{a);(k{b)) recurpol (p0;p1) [ q2=.((k{a);(k{b)) recurpol (q0;q1)
p1=.p2 [ p0=.p1 [ q1=.q2 [ q0=.q1 [ P=.P,<p2 [ Q=.Q,<q2 end.(>P);(>Q)}}
```

NB. **FC polynomiale d'interpolation de la fonction f aux points y0 y1 ...yN-1**

NB. B et A sont des matrices à éléments polynomiaux (variable z réelle ou complexe)

NB. Les lignes de B sont z-y0,z-y1,..,z-yN-1
NB. celles A sont des constantes (polynômes de degré 0)
NB. ***'B A'=. f fcinterpol x0 x1 ... xN-1***
NB. ***'B A'=. y0 y1 ...yN-1 fcinterpol x0 x1 ... xN-1***

```
    fcinterpol=:{()a
X=.y if. 0<NAT <'u' do. Y=.(u"0)X else. Y=.m end.
J=.}:J [ h=.Y(<0;J)}h=.(N,N)$0x [J=.K=.i.N=.#X
K=.2}.K [ h=.((({.-}:)X)%(({.-}:)Y))(<1;J)}h
for_k. K do. J=.}:J for_j. J do.
h=.(((<(k-2);>:j){h)+(((k+j){X)-j{X)%((<(<:k);>:j){h)-((<(<:k);j){h))(<k;j)}h end.end.
B;A [ B=.(-X),.1x [ A=.,.(L,1x)-0 0,(_2}.L=.(<(i.N);0){h),0 }}
```

NB. ***Polynômes constituant une Fonction rationnelle issue d'une fraction continue polynomiale***
NB. ***'p q'=.fcpol2frat B;A***

```
    fcpol2frat=:{()m
K=.2x+i._3x+#a [ p1=.(1{b)paddi q1 pprod p0=.0{a [ q0=.1x [ q1=.1{a [ b=.0x,b [ 'b a'=.y
for_k. K do. p2=.((k{a);(k{b)) recurpol (p0;p1) [ q2=.((k{a);(k{b)) recurpol (q0;q1)
p1=.p2 [ p0=.p1 [ q1=.q2 [ q0=.q1 end. p2;q2}}
```

NB. ***Fonction rationnelle frf interpolant la ft f aux points y0 y1 y2 ... yN-1***
NB. ***frf =: f f2frinterpol y0 y1 y2 ... yN-1***

```
    f2frinterpol=:{()c
'p q'=.fcpol2frat (u."0) fcinterpol n
p&p.%q&p. }}
```

NB. ESSAIS DIVERS

NB. ***FC de sin t***
NB. N = nb d'iterations désiré t=angle en radian
NB. t réel ou complexe
NB. ***'b a'=. N fcsin t***

```
fcsin =: {{(z*(-y%6x),1x,}.+:N*1x++:N);y,1x,(-z=.*:y)++:(1x+N)*3x++:N=.1x+i.x}}
```

NB. ***FC de cos t***
NB. N = nb d'iterations désiré t=angle en radian
NB. t réel ou complexe
NB. ***'b a'=. N fccos t***

```
fccos =: {{(z*_1x,}:C);1x 2,(-z=.*:y)+}.C=.+:N*_1x++:N=.1x+i.x}}
```

NB. ***FC de exp t***
NB. N = nb d'iterations désiré t réel ou complexe
NB. ***'b a'=. N fcexp t***

```
fcexp =: {{(y*1x,-N);1x 1,y+>:N=.1x+i.x}}
```

NB. ***FC de (1+z)^s***
NB. N = nb d'iterations désiré s réel ou complexe
NB. t réel ou complexe |t|<1
NB. ***'b a'=. N fcbin s;t***

```
fcbin =: {{((s*z),N*c);1 1x,(>:N)-c=.z*(N=.1x+i.x)-s['s z'=.y}}
```

NB. ***F(x)=Arctg(x)/x***
NB. N = nb d'iterations désiré ; s réel ou complexe
NB.

```
fcarctg =: {{)d
A1=.0x 0x,-N [ A0=.1 3x,2x+N [ B=._1x,*:N=.1x++:i.x
_1 x: y*(B**:y) fcval A0+A1**:y}}
```

NB. ***Racines du polynôme de Chebychev de 1e espèce d'ordre N TN(t)***
NB. ***rac =. RT N***

```
RT =: {{/:~2 o. 1p1*(>:+:i.y)%+:y}}"0
```

NB. ***Meilleures abscisses pour interpolation dans [abs1,abs2]***
NB. ***X =. N MABSC abs1,abs2***

```
MABSC=:{{/:~(-:+/y)-(-:-/y)*RT x}}"0 _
```

NB. DIVERS

NB. ***Nature des objets nom 0; adverbe 1; conjonction 2; verbe 3; indéfini _1; invalide _2***
NB. ***r =. NAT < 'ID'*** ou ***r =. NAT 'ID1';'ID2';'ID3'...***
NAT =: 4!:0

NB. ***Efface divers objets***
NB. **r =. *EFFACE <'ID'*** ou **r =. *EFFACE 'ID1';'ID2';'ID3'...***
EFFACE =: 4!:55

NB. ***Affiche et transmet son argument de droite*** (si insertion dans une expression)
NB. ***Verbe AF Expression-nom***
AF =: E =: 1!:2&2

NB. ***Nombre de chiffres affichés pour un nombre en flottant, double ou double-double précision)***
NB. BPP N (1 <: N <:40)
BPP =: 9!:11
BPP 16 NB. par défaut

NB. ***Séparation Numérateur Dénominateur d'un nb rationnel (ou décimal) y***
NB. ***'N D'=. ND y***
ND =: 2&x:

NB. ***le polynôme de la variable x de coefficients B***
NB. ***admet une racine réelle X =p+1/Y où Y>1 , p entier***
NB. Y vérifie l'équation polynomiale de coefficients B
NB. ***B =. p A2B Y***
A2B=:{{+/((V>:/|.V)*(x:x)^(0>.V-/|.V))*A*M=.|:|.!/~V=.i.#A=.x:y}}"0 _

NB. ***Dérivée d'une série de puissances***
NB. ***sd =. sder s***
sder =: }.@(]*i.@#)

NB. ***Primitive d'une série de puissances***
NB. ***sp =. c0 spri s***
spri =: [,]%>:@i.@#@]

NB. ***fcg ⇒ Série de puissances***
NB. ***s =. fcg2s b;a***
fcg2s=:{{)m
z=.1{b [K=.2}.i.#a [P=.B+(1x,z)*{.a [Q=.1x,z [C=.({.a),(1{b)%z=.1{a [B=.2{.b=.0x,b ['b a'=.y
for_k. K do. P=.P,((k{a)*((k-1){P))+(k{b)*((k-2){P) [Q=.Q,((k{a)*((k-1){Q))+(k{b)*((k-2){Q)
C=.C,(_1x^k-1)*z%(k{Q)*(k-1){Q [B=.B,z=.z*k{b end.}}"_

NB. ***Série de puissances ⇒ fcg***
NB. ***'b a' =. s2fcg s***
s2fcg =:{{)m
a=. ({.y),1x [b=.1{y [K=.2}.i.#y
for_k. K do. a=.a,>:z [b=.b,-z=. (k{y)%(<:k){y end.
b;a }}"_

NB. Programmes annexes œuvrant sur les polynômes (p=c0 c1 c2 ….)

NB. ***p =. psup0 p0***

psup0 =: 0&~:@(+./\.)@]#] NB. suppression des 0 non significatifs

NB. ***p =. p0 paddi p1***

paddi =: psup0@((#@[>.#@])\{.+/@(>@;)) NB. somme

NB. ***p =. p0 psous p1***

psous =: psup0@([paddi-@]) NB. soustraction

NB. ***p =. p0 pprod p1***

pprod =: psup0@(+//.@(*/)) NB. produit

NB. ***p =. a b recurpol p0;p1*** NB. p = a*p0 + b*p1 ; a et b constants

recurpol =: {{psup0 (a pprod p0)paddi(b pprod p1) ['a b'=.x ['p0 p1'=.y}}

NB. Précisions

DP =: 8&c. :: (8&c.&.>) NB. Double précision
DDP =: 11&c. :: (11&c.&.>) NB. Double double précision
EIP =: 64&c. :: (64&c.&.>) NB. Précision étendue
RAP =: 128&c. :: (128&c.&.>) NB. Précision rationnelle

NB. Utilisation des séries

```
fcadd  =: s2fcs @ ((fcs2s @ [) saddi (fcs2s @ ]))
fcsou  =: s2fcs @ ((fcs2s @ [) ssous (fcs2s @ ]))
fcpro  =: s2fcs @ ((fcs2s @ [) sprod (fcs2s @ ]))
fcquo  =: s2fcs @ ((fcs2s @ [) squo (fcs2s @ ]))
fcinv  =: s2fcs @ sinv @ fcs2s @ ]
fcder  =: s2fcs @ sder @ fcs2s @ ]
fcpri  =: s2fcs @ ([ spri fcs2s @ ])
fcrec  =: s2fcs @ srec @ fcs2s @ ]
fccom  =: s2fcs @ ((fcs2s @ [) scom (fcs2s @]))
fcbin  =: s2fcs @ ([ sbin ])
fcpui  =: s2fcs @ ((fcs2s @ [) spui ])
```