FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES

Robert Coquidé (17/09/2018)

(Définitions, propriétés mathématiques et programmation en J)

On notera : $\boxed{E=\mathbb{C}-\{-1,-2,-3...\}\ \text{ et }\ E^{*}=\mathbb{C}-\{0,-1,-2,-3...\}}$

Fonction Gamma d'EULER :

$\Gamma(a)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{a-1}dt$ avec $a\in\mathbb{C}$ $\operatorname{Re}(a)>0$ généralisée par récurrence :

$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$; $a\in E^{*}$ ou $\Gamma(a)=\Gamma(a+1)/a$; $a\in E^{*}$

On a $\Gamma(n+1) = n!$ si $n\in\mathbb{N}$; $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$; $\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$

$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}$ (pour $n\in\mathbb{N}$) $\Gamma(-n+\frac{1}{2})=(-1)^{n}\frac{2^{2n}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$

$\Gamma(2a)=\Gamma(a)\Gamma(a+1/2)\frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}}$; $\Gamma(2a+1)=\Gamma(a+1)\Gamma(a+1/2)\frac{2^{2a}}{\sqrt{\pi}}$

$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}$; $\Gamma(\frac{1}{2}+a)\Gamma(\frac{1}{2}-a)=\frac{\pi}{\cos(\pi a)}$

Notation américaine : $\Gamma(a+1)=a!$ pour $a\in E$

Fonction Beta d'EULER :

$\beta(p,q)=\int_{0}^{1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ si $p>0,q>0$

et généralisée à $p,q\in E^{*}$

$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ pour $p,q\in E^{*}$

En J :

```
Feuler =: !@<: : (*&$:%$:@+)
```

Utilisation :

`Res =. Feuler a` $a\in E^{*}$ $\Gamma(a)$

`Res =. a Feuler b` $a,b\in E^{*}$ $\beta(a,b)$

Ex : Forme monadique : fonction Gamma

```
    Feuler 5 2j5 _3j4 _3r2
```

NB. $\Gamma(5),\Gamma(2j5),\Gamma(\_3j4),\Gamma(\_3r2)$

```
24 0.00509293j_0.00985684 1.461e_5j2.07607e_5 2.36327
    !      4 1j5 _4j4 _5r2
```

NB. notation américaine

```
24 0.00509293j_0.00985684 1.461e_5j2.07607e_5 2.36327
```

Forme dyadique : fonction Beta

```
    4.5 Feuler 3 2j3 _1r2
```

NB. $\beta(4.5,3),\beta(4.5,2j3),\beta(4.5,\_1r2)$

```
0.012432 _0.0102259j0.00051849 _6.87223
```

INTÉGRALES CALCULABLES AVEC LES FONCTIONS Γ ET β D’EULER

Intégrales	**Conditions**
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu}(x)\sin^{\mu}(x)dx = \frac{1}{2}\beta(\frac{\nu+1}{2},\frac{\mu+1}{2})$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$ $\mathrm{Re}(\mu) > -1$
$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu}dx}{(1+x^{\mu})^{\lambda}} = \frac{1}{\mu}\beta(\frac{\nu+1}{\mu},\lambda-\frac{\nu+1}{\mu})$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu)>0$ $\mathrm{Re}(\lambda)> \frac{\mathrm{Re}(\nu)+1}{\mathrm{Re}(\mu)}$
$\int_1^{\infty} \frac{x^{\nu}dx}{(x^{\mu}-1)^{\lambda}} = \frac{1}{\mu}\beta(\lambda-\frac{\nu+1}{\mu},1-\lambda)$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ $\frac{\mathrm{Re}(\nu)+1}{\mathrm{Re}(\mu)} < \mathrm{Re}(\lambda) < 1$
$\int_0^{1} x^{\nu}(1-x^{\mu})^{\lambda}dx = \frac{1}{\mu}\beta(\frac{\nu+1}{\mu},\lambda+1)$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$
$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^{\mu}}x^{\nu}dx = \frac{1}{\mu\lambda^{\frac{\nu+1}{\mu}}}\Gamma(\frac{\nu+1}{\mu})$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu)>0$ $\mathrm{Re}(\lambda)>0$
$\int_a^{b} (x-a)^{\nu}(b-x)^{\mu}dx = (b-a)^{\nu+\mu+1}\beta(\nu+1,\mu+1)$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu)> -1$ $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$
$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{x^m} = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\cos(\frac{m\pi}{2})}$; $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)dx}{x^m} = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin(\frac{m\pi}{2})}$	$0 < \mathrm{Re}(m) < 1$
$\int_0^{\infty} x^{m-1}\cos(x)dx = \Gamma(m)\cos(\frac{m\pi}{2})$; $\int_0^{\infty} x^{m-1}\sin(x)dx = \Gamma(m)\sin(\frac{m\pi}{2})$	$0 < \mathrm{Re}(m) < 1$
$\int_0^{\infty} \cos(x^m)dx = \frac{1}{m}\Gamma(\frac{1}{m})\cos(\frac{\pi}{2m})$; $\int_0^{\infty} \sin(x^m)dx = \frac{1}{m}\Gamma(\frac{1}{m})\sin(\frac{\pi}{2m})$	$\mathrm{Re}(m) > 1$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{p-q-1}\sin(\theta)^{q-1}\cos(p\theta)d\theta = \beta(q,p-q)\cos(q\frac{\pi}{2})$	$0 < \mathrm{Re}(q) \leq 1$ $\mathrm{Re}(q) < \mathrm{Re}(p)$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{p-q-1}\sin(\theta)^{q-1}\sin(p\theta)d\theta = \beta(q,p-q)\sin(q\frac{\pi}{2})$	$0 < \mathrm{Re}(q) \leq 1$ $\mathrm{Re}(q) < \mathrm{Re}(p)$

Symbole de POCHHAMMER :

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \text{ pour } a \in E^* \text{ et } n \in \mathbb{N} \;;\; (a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$

$$(a)_0 = 1 \;;\; (0)_n = 0 \;;\; (0)_0 = 1 \;;\; (1)_n = n! \;;\; (-1)^n(-a)_n = (a-n+1)_n = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-n)} = \frac{a!}{(a-n)!}$$

$$(a)_n = (a)_{n-1}(a+n-1) \;;\; (a)_n = (a)_{n-k}(a+n-k)_k \;;\; (a)_n = (a)_k(a+k)_{n-k} \;;\; (a)_{n+k} = (a)_n(a+n)_k = (a)_k(a+k)_n$$

En J : `POC =: ^!.1`

Utilisation : `Res =. a  POC  k` calcul de $(a)_k$ pour $a \in E$ et $k \in \mathbb{N}$

Ex1:

```
      3r7  POC  5  9
  379440r16807 1990648483200r40353607
```

Ex2 :

```
      2x  POC   7x
  40320
      (Feuler 2x+7x)%Feuler 2x    NB. Vérification
  40320
```

Ex3 :

```
      2j1 3j_1 0j3 POC 5
  160j890 1370j_2510 360j_630
```

Binôme de NEWTON généralisé

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n z^n \text{ où } C_a^n = \frac{(a-n+1)_n}{n!} = \frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!} = \frac{\Gamma(\mathrm{a}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}+1)\Gamma(\mathrm{a}-\mathrm{n})} = \frac{\mathrm{a}!}{\mathrm{n}!(\mathrm{a}-\mathrm{n}-1)!}$$

Notation américaine : $\mathrm{C}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$; $C_a^0 = 1$; $C_a^1 = a$ $\qquad \frac{a}{C_a^n} + \frac{a}{C_a^{n+1}} = \frac{a+1}{C_{a-1}^n}$

$$C_{-a}^n = (-1)^n C_{a+n-1}^n = (-1)^n \frac{(a)_n}{n!} = \frac{(-a-n+1)_n}{n!} \quad ; \quad C_a^n = (-1)^n C_{-a+n-1}^n = (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!} = \frac{(a+1-n)_n}{n!}$$

$$C_{a+b}^n = \sum_{p=0}^{n} C_a^p C_b^{n-p} \text{ où } \mathrm{n} \in \mathbb{N} \;;\; \mathrm{a,b} \in \mathbb{C} \;;\; C_a^n = C_{a-1}^{n-1} + C_{a-1}^n \;;\; n > k \in \mathbb{N} \Rightarrow C_k^n = 0$$

En J `Res =. p ! a` calcul de C_a^p ($p \in \mathbb{N}$ $\;a \in \mathbb{C}$)

Ex1 :

```
      4 ! 6
  15
```

NB. C_6^4

Ex2 :

```
      7 ! _9
  _6435
```

NB. C_{-9}^7

Ex3 :

```
      5 ! 1j3
  _3.75j0.75
```

NB. C_{1+i3}^5

Formules avec (±1/2 ou a±1/2)

$n\in\mathbb{N}$; $a\in E=\mathbb{C}-\{-1,-2,-3,...\}$ Attention : il ne faut aucun terme ∞ au numérateur ni nul au dénominateur

$(\frac{1}{2})!=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	$(\frac{-1}{2})!=\sqrt{\pi}$	$(\mathrm{a}+\frac{1}{2})!=\frac{(2a+1)!}{a!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a+1}}$	$(\mathrm{a}-\frac{1}{2})!=\frac{(2a-1)!}{(a-1)!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}$
$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$	$\Gamma(\frac{-1}{2})=-2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(a+\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(2\mathrm{a})\sqrt{\pi}}{\Gamma(a)2^{2a-1}}$	$\Gamma(a-\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(2\mathrm{a})\sqrt{\pi}}{\Gamma(a)2^{2a-2}(2a-1)}$
$(\frac{1}{2})_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$	$(\frac{-1}{2})_n=\frac{-(2n)!}{2^{2n}n!(2n-1)}$	$(a+\frac{1}{2})_n=\frac{(2a+1)!\sqrt{\pi}}{a!2^{2a+1}}$	$(a-\frac{1}{2})_n=\frac{(2a-1)!\sqrt{\pi}}{(a-1)!2^{2a-1}}$
$C_{1/2}^{n}=(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}$	$C_{-1/2}^{n}=(-1)^{n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$	$C_{a+1/2}^{n}=\frac{(2a-2n+2)_{2n}}{(a-n+1)_n 2^{2n}n!}$	$C_{a-1/2}^{n}=\frac{(2a-2n)_{2n}}{(a-n)_n 2^{2n}n!}$

Formules de transformation

$k,m,n\in\mathbb{N}$ $\quad a\in E=\mathbb{C}-\{-1,-2,-3...\}$

$$C_a^k=\frac{a!}{k!(a-k)!}\quad;\quad C_n^k=C_n^{n-k}\quad;\quad C_a^k=\frac{a}{k}C_{a-1}^{k-1}\quad;\quad C_a^k=C_{a-1}^k+C_{a-1}^{k-1}\quad;\quad C_a^k=(-1)^k C_{k-a-1}^k$$

$$\frac{C_m^k}{C_a^k}=\frac{C_{n-k}^{m-k}}{C_a^m}\quad;\quad \frac{C_{a+1}^k}{C_a^k}=\frac{a+1}{a+1-k}\quad;\quad C_a^kC_{a-\frac{1}{2}}^k=C_{2a}^{2k}C_{2k}^k 2^{-2k}\quad;\quad C_{k-\frac{1}{2}}^k=C_{2k}^k 2^{-2k}\quad;\quad C_{\frac{-1}{2}}^k=(-1)^k C_{2k}^k 2^{-2k}$$

Formules de sommation

$i,j,k,l,m,n,p\in\mathbb{N}$ $\quad a,b\in E=\mathbb{C}-\{-1,-2,-3...\}$ $\quad$ (*pour qu'aucun terme ne soit* ∞)

$$\sum_{k=0}^{n}C_{a+k}^k=C_{a+n+1}^n\quad;\quad\sum_{k=0}^{n}C_m^k=C_{m+1}^{n+1}\quad;\quad\sum_{k=0}^{\infty}C_a^kC_b^{n-k}=C_{a+b}^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_a^kC_{a+n-k}^{n-k}(-1)^k=1\quad;\quad\sum_{k=0}^{\infty}C_a^{m+k}C_b^{n-k}=C_{a+b}^{m+n}\quad;\quad\sum_{k=0}^{l-m}C_l^{m+k}C_a^{n+k}=C_{l+a}^{l-m+n}$$

$$\sum_{k=0}^{l-m}C_l^{m+k}C_{a+k}^n(-1)^k=(-1)^{l+m}C_{a-m}^{n-l}\quad;\quad\sum_{k=0}^{l}C_{l-k}^mC_a^{k-n}(-1)^k=(-1)^{l+m}C_{a-m-1}^{l-m-n}\quad;\quad\sum_{k=0}^{l}C_{l-k}^mC_n^{i+k}=C_{l+i+1}^{m+n+1}\quad n\geq i$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{m-a+b}^kC_{n+a-b}^{n-k}C_{a+b}^{m+n}=C_a^mC_b^n\quad;\quad\sum_{\mathrm{j,k}\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_{j+k}^{k+l}\mathrm{C}_a^j\mathrm{C}_n^kC_{b+n-j-k}^{m-j}(-1)^{j+k}=(-1)^l\mathrm{C}_{n+a}^{n+l}C_{b-a}^{m-n-l}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{l+m}^{l+k}C_{l+m}^{m+k}(-1)^k=\frac{(l+m)!}{l!m!}\quad;\quad\sum_{k=0}^{\infty}C_{l+m}^{l+k}C_{m+n}^{m+k}C_{n+l}^{n+k}(-1)^k=\frac{(l+m+n)!}{l!m!n!}$$

$$\sum_{i,j,k\in\mathbb{N}}C_{l+m}^{m+i}C_{l+n}^{n+j}C_{m+n}^{n+k}C_{l+p}^{p-i-j}C_{m+p}^{p+i-k}C_{n+p}^{p+j+k}(-1)^{i+j+k}=\frac{(l+m+n+p)!}{l!m!n!p!}$$

à apprendre par coeur
pour la prochaine fois !

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^kf(k)\iff f(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^kg(k)$$

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALES

$$Fh(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k...(a_p)_k}{(b_1)_k...(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}\;=Fh(\begin{matrix}a_1,a_2,...,a_p\\ b_1,b_2,...,b_q\end{matrix}\;|\,z)\text{ (autre notation)}$$

$$a_i\in\mathbb{C},\quad b_j\in E,\quad z\in\mathbb{C}\;,\quad p,q\in\mathbb{N}\qquad Fh(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;0)=1$$

Si $\exists a_i=-m$ ($\mathrm{m}\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ le développement se réduit à un polynome de degré m

Si $\exists b_j=-m$ ($\mathrm{m}\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ convergence uniquement pour $z=0$ (pour séries formelles uniquement)

Sinon convergence pour $|z|<R$ (rayon de convergence fonction de p et q)

$p\le q\quad\Rightarrow R=\infty$ converge dans tout $\mathbb{C}$

$p=q+1\Rightarrow R=1$ converge dans le cercle trigo

Alors on calcule $\quad\Omega=\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{i=1}^{p}a_i)$

$\Omega>-1\quad\Rightarrow$ converge pour $z=-1$

$\Omega>\;0\quad\Rightarrow$ converge pour $z=-1$ et $z=1$

$p>q+1\Rightarrow R=0$ converge uniquement si $z=0$ (inutile)

Une permutation des a_i et/ou des b_j est sans effet.

En J : (les indices commencent à 0)

Fh($a_0,a_1,\ldots,a_{p-1}$; $b_0,b_1,\ldots,b_{q-1}$; z) : $\boxed{\texttt{Res =. ((}a_0,a_1,\ldots,a_{p-1}\texttt{) H. (}b_0,b_1,\ldots,b_{q-1}\texttt{)) z}}$

Ex1 :
```
   (2 3 H. 4 5 6) 0.72
1.0367512653318409
```

Ex2 :
```
   (1 3.2 H. 4.1 1.8) 0.22  0.85
1.1018826849052601 1.4813892082850126
```

Ex3 :
```
   (5 1j_1 6 H. 3 4j0.5 )  _0.4
0.36283928639548213j0.40015628570483308
```

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'EULER ET DE GAUSS :

On a $p=2$ et $q=1$

$$Fh(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}$$

Rayon de convergence égal à 1 (*sauf réduction à un polynôme quand a ou b est un entier négatif ou nul*).

En J Fh(a,b ;c ;z) : $\boxed{\texttt{Res =. ((a,b) H. c) z}}$

Ex :
```
   (1 2 H. 3)  _0.2  0.15
0.88392216030226878 1.112793733135548
```

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES DE KUMMER :

On a p=q=1

$$Fh(a;b;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(b)_k}\frac{z^k}{k!}$$

Rayon de convergence infini (*réduction à un polynôme si a entier* ≤ 0).

En J Fh(a ; b ; z) : `Res =. (a H. b) z`

Ex:
```
   (4.2 H. 1.7) 1.456
17.420619186147668
```
NB. $Fh(4.2;1.7;1.456)$

Fonctions Hypergéométriques dégénérées

Si $p=0$ on a $R=\infty$

$$Fh(;b;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b)_k}\frac{z^k}{k!} \quad ; \quad Fh(;;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z$$

Si $q=0$ $p=1$ on a R=1 : $Fh(1;;z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}$ (série géométrique)

En J : **Si p=0 (*resp. q=0*) on place un vecteur vide `''` à gauche (*resp. à droite*).**

Ex1 :
```
   ('' H. '')  4.5
90.017131300521
   ^ 4.5
90.017131300521
```
NB. $e^{4.5}$

NB. Vérification

Ex2 :
```
   (1 H. '') 0.7

3.33333333333333
   % 1-0.7
3.33333333333333
```
NB. $\frac{1}{1-0.7}$

NB. Vérification

Ex3 :
```
   ('' H. 3r2) 2.36
3.50673873894328
```

Th1 (théorème principal : condition nécessaire et suffisante)

$$\begin{pmatrix} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}\ ;\ \gamma_n = c_n\frac{z^n}{n!};\ c_0=\gamma_0\neq 0 \\ \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)...(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)...(n+b_q)}\frac{z}{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(z)=\gamma_0 Fh(a_1,a_2...a_p;b_1,b_2...b_q;z) \\ \gamma_0\neq 0 \end{pmatrix}$$

Formules utiles pour l'utilisation (et la démonstration) de ce théorème :

$\frac{(a+1)!}{a!}=(a+1)$	$\frac{(a+2)!}{a!}=(a+1)(a+2)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=a$	$\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)}=a(a+1)$
	$a\in\mathbb{C}\quad k\in\mathbb{N}$		
$\frac{C_a^{k+1}}{C_a^k}=\frac{(a-k)}{(k+1)}$	$\frac{C_a^{k+2}}{C_a^k}=\frac{(a-k)(a-k-1)}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{(a)_{k+1}}{(a)_k}=(a+k)$	$\frac{(a)_{k+2}}{(a)_k}=(a+k)(a+k+1)$

Démonstration :

On a $\gamma_0=c_0\neq 0$ donc $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{a_1a_2...a_p}{b_1b_2...b_q}\frac{z}{1}$ et $\gamma_1=c_0\frac{(a_1)_1(a_2)_1...(a_p)_1}{(b_1)_1(b_2)_1...(b_q)_1}\frac{z^1}{1!}$; supposons qu'à un ordre k-1 on ait

$\gamma_{k-1}=c_0\frac{(a_1)_{k-1}...(a_p)_{k-1}}{(b_1)_{k-1}...(b_q)_{k-1}}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}$ on peut alors écrire

$\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}=\frac{(k-1+a_1)...(k-1+a_p)z}{(k-1+b_1)...(k-1+b_q)k}$ et en utilisant $(k-1+a)(a)_{k-1}=(a)_k$ on obtient

$\gamma_k=c_0\frac{(a_1)_k...(a_p)_k z^k}{(b_1)_k...(b_q)_k k!}$ $\forall k\geq 0$ par suite $f(z)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n...(a_p)_n z^n}{(b_1)_n...(b_q)_n n!}=c_0Fh(a_1...a_p;b_1...b_q;z)$

Inversement, $f(z)=c_0Fh(a_1...a_p;b_1...b_q;z)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n...(a_p)_n z^n}{(b_1)_n...(b_q)_n n!}$ $\Rightarrow$ $\gamma_n=c_0\frac{(a_1)_n...(a_p)_n z^n}{(b_1)_n...(b_q)_n n!}$ et

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(a_1)_{n+1}}{(a_1)_n}...\frac{(a_p)_n}{(a_p)_{n+1}}\frac{(b_1)_n}{(b_1)_{n+1}}...\frac{(b_q)_n}{(b_q)_{n+1}}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{z^{n+1}}{z^n}$$

$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(n+a_1)...(n+a_p)}{(n+b_1)...(n+b_q)}\frac{z}{n+1}$ cqfd

Ex1 : calcul de $S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{5}{3})^k}{(k!)^5}$

```
    Flot +/(5r3^N)%(!N)^5x [N=. i.100x
2.754068565953413 2
```

On a $\gamma_k=\frac{(\frac{5}{3})^k}{(k!)^5}$; $\gamma_0=1$; $\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{1}{(k+1)^4}\frac{(\frac{5}{3})}{k+1}\Rightarrow S=Fh(;1,1,1,1;\frac{5}{3})$

```
    Flot ('')H.(4$1x)   5r3
2.754068565953413 2
```

Ex2 : **calcul de** $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+5)(5n+2)}{(3n+4)(5n+1)}\frac{z^n}{n!}$

On a $\gamma_0=\frac{5}{2}$; $\gamma_n=\frac{(2n+5)(5n+2)}{(3n+4)(5n+1)}\frac{z^n}{n!}$; $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(2n+7)(5n+4)}{(3n+7)(5n+6)}\frac{(3n+4)(5n+1)}{(2n+5)(5n+2)}\frac{z^{n+1}}{z^n}\frac{n!}{(n+1)!}$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(n+\frac{7}{2})(n+\frac{7}{5})(n+\frac{4}{3})(n+\frac{1}{5})}{(n+\frac{7}{3})(n+\frac{6}{5})(n+\frac{5}{2})(n+\frac{2}{5})}\frac{z}{n+1} \quad\Rightarrow\quad A(z)=\frac{5}{2}Fh(\frac{7}{2},\frac{7}{5},\frac{4}{3},\frac{1}{5};\frac{7}{3},\frac{6}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5};z)$$

En J :

```
A =: 5r2 * (7r2 7r5 4r3 1r5) H. (7r3 6r5 5r2 2r5)
 z=.0.8
(+/(5+2*N)*(2+5*N)*(z^N)%(4+3*N)*(1+5*N)*!N=.i.100)  ;  A z
┌──────────────────┬──────────────────┐
│3.8413252090708978│3.8413252090708965│
└──────────────────┴──────────────────┘
z=.1.7
(+/(5+2*N)*(2+5*N)*(z^N)%(4+3*N)*(1+5*N)*!N=.i.100)  ;  A z
┌──────────────────┬──────────────────┐
│7.0661719072675799│7.0661719072675773│
└──────────────────┴──────────────────┘
z=._372r100
(+/(5+2*N)*(2+5*N)*(z^N)%(4+3*N)*(1+5*N)*!N=.i.100)  ;  A z
┌──────────────────┬──────────────────┐
│1.0645922284262372│1.0645922284262395│
└──────────────────┴──────────────────┘
```

Ex3 : soit $S_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+n^2}$; $\gamma_{\mathrm{n}}=\frac{z^n}{1+n^2}$; $\gamma_0=1$; $\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n+i)(n-i)(n+1)}{(n+1+i)(n+1-i)}\frac{z}{n+1}$

donc $S_1(z)=Fh(1,i,-i;1+i,1-i;z)$

En j :

```
FhS1 =: (1 0j1 0j_1)H.(1j1 1j_1)     NB. paramètres complexes
    FhS1 0.8
1.6347280847493117
     +/(0.8^N)%1+*:  N =.i. 1000     NB. Vérification
1.6347280847493117
```

Ex4 : Soit

$$S_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)(2n+1)}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\ ;\ \gamma_{\mathrm{n}}=\frac{z^n}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\ ;\ \gamma_0=\frac{1}{6}$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{(n+2)(n+3)(2n+5)}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n+1)^2(n+\frac{3}{2})}{(n+3)(n+\frac{5}{2})}\frac{z}{n+1}\Rightarrow\ S_2(z)=\frac{1}{6}zFh(1,1,\frac{3}{2};3,\frac{5}{2};z)$$

```
En J : FhS2 =: 1r6* (*(1 1 3r2)H.(3 5r2))
       FhS2 0.73
0.14681936289813047
       +/(0.73^N)%(1+2*N)*(1+N)*N =. 1+i.10000 NB. Vérification
0.14681936289813055
```

Ex5 :

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(C_{n+k}^{k})^{2}}{2^{k}}z^{k}$$

$$\gamma_k=\frac{(C_{n+k}^{k})^{2}}{2^{k}}z^{k}\ \ ;\ \ \gamma_0=1\ \ ;\ \ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=(\frac{C_{n+k+1}^{k+1}}{C_{n+k}^{k}})^{2}\frac{2^{k}}{2^{k+1}}\frac{z^{k+1}}{z^{k}}=(\frac{(n+k+1)!}{(n+k)!}\frac{k!}{(k+1)!})^{2}\frac{z}{2}$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=(\frac{n+k+1}{k+1})^{2}\frac{z}{2}=\frac{(k+n+1)(k+n+1)}{(k+1)}\frac{(\frac{z}{2})}{k+1}\ \ \Rightarrow\ S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(C_{n+k}^{k})^{2}}{2^{k}}z^{k}=Fh(n+1,n+1;1;\frac{z}{2})$$

Vérification en J :

```
    'n z k' =. 5x ; 1r2 ; i.200x
    Flot ( +/(*:k!n+k)*(-:z)^k ) ,: ( ((2$n+1x)H.1x) -:z )
358.96966925773512
358.96966925773529
    'n z k' =. 7x ; 3r8 ; i.300x
    Flot ( +/(*:k!n+k)*(-:z)^k ) ,: ( ((2$n+1x)H.1x) -:z )
797.01325791144598
797.0132579114462
    'n z k' =. 3x ; 6r11 ; i.300x
    Flot ( +/(*:k!n+k)*(-:z)^k ) ,: ( ((2$n+1x)H.1x) -:z )
38.509252548217773
38.509252548217773
    'n z k' =. 5x ; 0.2j0.3 ; i.200x
    Flot ( +/(*:k!n+k)*(-:z)^k ) ,: ( ((2$n+1x)H.1x) -:z )
_19.298196442827289j_0.16137990457888951
_19.298196442827283j_0.16137990457888929
```

Ex6 :

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{C_{n+k}^{k}}\ \ ;\ \ \gamma_{\mathrm{k}}=\frac{1}{C_{n+k}^{k}}\ \ ;\ \ \gamma_0=1\ \ ;\ \ \frac{\gamma_{\mathrm{k}+1}}{\gamma_{\mathrm{k}}}=\frac{C_{n+k}^{k}}{C_{n+k+1}^{k+1}}=\frac{(k+1)!}{k!}\frac{(n+k)!}{(n+k+1)!}=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+n+1)}\frac{1}{(k+1)}$$

$$\Rightarrow S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{C_{n+k}^{k}}=Fh(1,1;n+1;1)$$

Vérification en J :

```
    'n k' =. 11x;i.5000x
    Flot ( x: +/%k ! n+k ) ,: (x: (1 1x H. (n+1x))1x )
1.1000000000000001
1.1000000000000001
    'n k' =. 9x;i.5000x
    Flot ( x: +/%k ! n+k ) ,: (x: (1 1x H. (n+1x))1x )
1.125
1.125
    'n k' =. 8x;i.5000x
    Flot ( x: +/%k ! n+k ) ,: (x: (1 1x H. (n+1x))1x )
1.1428571428571428
1.1428571428571428
    'n k' =. 7x;i.5000x
    Flot ( x: +/%k ! n+k ) ,: (x: (1 1x H. (n+1))1x )
1.1666666666666667
1.1666666666666667
```

Ex7 :

$$S(k,a,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{a+n}^{n}}{C_{a+kn}^{kn}}z^{n}\ ;\ k\in\mathbb{N}^{*}\ \ ;\ \ a\in\mathbb{C}$$

$$\gamma_{n}=\frac{C_{a+n}^{n}}{C_{a+kn}^{kn}}z^{n}\ \ ;\ \ \gamma_{0}=1\ \ ;\ \ \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n}}=\frac{C_{a+n+1}^{n+1}}{C_{a+n}^{n}}\frac{C_{a+kn}^{kn}}{C_{a+kn+k}^{kn+k}}\frac{z^{n+1}}{z^{n}}=\frac{(a+n+1)!}{(a+n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{(a+kn)!}{(a+kn+k)!}\frac{(kn+k)!}{(kn)!}z$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n}}=\frac{(a+n+1)(kn+1)(kn+2)...(kn+k)}{(n+1)(a+kn+1)(a+kn+2)...(a+kn+k)}z=\frac{(n+a+1)(n+\frac{1}{k})(n+\frac{2}{k})...(n+\frac{k}{k})}{(n+\frac{a+1}{k})(n+\frac{a+2}{k})...(n+\frac{a+k}{k})}\frac{z}{n+1}$$

$$\Rightarrow S(k,a,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{a+n}^{n}}{C_{a+kn}^{kn}}z^{n}=Fh(a+1,\frac{1}{k},\frac{2}{k},...,\frac{k}{k};\frac{a+1}{k},\frac{a+2}{k},...,\frac{a+k}{k};z)\ \text{ il faut } a\neq-1,-2,...,-k$$

Vérification en J :

```
     'a k z n' =. 5r2;4;4r5;i.1000
Flot(x:+/((n!a+n)%(k*n)!a+k*n)*z^n),:(x:((a+1),(1+i.k)%k)H.((a+1+i.k)%k)z)
1.3098351766117611
1.3098351766117611
```

Th2 (EULER)

$$\boxed{Fh(a,b;c;z)=\frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\,dx=\frac{1}{\beta(a,c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-zx)^{-b}\,dx}$$

Démonstration :

On a : $(1-zx)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-a}^n z^n x^n$ donc

$$I=\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-a}^n z^n\int_0^1 x^{n+b-1}(1-x)^{c-b-1}\,dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-a}^n\beta(n+b,c-b)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-a)!}{n!(-a-n)!}\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)}z^n$$

$=(-a)!(c-b-1)!\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+b-1)!}{(-a-n)!(n+c-1)!}\frac{z^n}{n!}$ on en déduit :

$$\gamma_{\text{n}}=(-1)^n\frac{(n+b-1)!}{(-a-n)!(n+c-1)!}\frac{z^n}{n!}\quad;\quad\gamma_0=\frac{(b-1)!}{(-a)!(c-1)!}$$

$\frac{\gamma_{\text{n+1}}}{\gamma_{\text{n}}}=\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{(n+b)!}{(n+b-1)!}\frac{(-a-n)!}{(-a-n-1)!}\frac{(n+c-1)!}{(n+c)!}\frac{z}{n+1}=\frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)}\frac{z}{n+1}$ d'où :

$$I=\frac{(-a)!(c-b-1)!(b-1)!}{(-a)!(c-1)!}Fh(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}Fh(a,b;c;z)=\beta(b,c-b)Fh(a,b;c;z)$$

la symétrie de a et b termine la démonstration. cqfd

Th3 (EULER) :

$$\boxed{Fh(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}}$$

Démonstration :

En faisant z=1 dans le théorème précédent :

$$Fh(a,b;c;1)=\frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-x)^{-a}\,dx=\frac{\beta(b,c-b-a)}{\beta(b,c-b)}=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}$$

$$Fh(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c-b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$ cqfd

Th4 (SAALSCHÜTZ) :

$$\boxed{Fh(a_1,...,a_p,c;b_1,...,b_q,d;z)=\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)\Gamma(c-d)}\int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{d-c-1}Fh(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;tz)dt}$$

Démonstration :

$I=\int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{d-c-1}Fh(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;tz)dt$; on pose : $X_n=\frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_q)_n}$

$$I=\int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{d-c-1}\sum_{n=0}^{\infty}X_n\frac{t^n z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}X_n\frac{z^n}{n!}\beta(n+c,d-c)=\Gamma(d-c)\sum_{n=0}^{\infty}X_n\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n+d)}\frac{z^n}{n!}$$

$\gamma_n=X_n\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n+d)}\frac{z^n}{n!}$; $\gamma_0=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)}$; $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(n+a_1)...(n+a_p)(n+c)}{(n+b_1)...(n+b_q)(n+d)}\frac{z}{n+1}$ d'où :

$I=\frac{\Gamma(c)\Gamma(d-c)}{\Gamma(d)}Fh(a_1,...,a_p,c;b_1,...,b_q,d;z)$ cqfd

Th5 (KUMMER) :

$$\boxed{Fh(a;b;z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt \quad ; \quad \text{condition : } \operatorname{Re}(b)>\operatorname{Re}(a)>0}$$

Démonstration :

$$e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n t^n}{n!}\Rightarrow I=\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_0^1 t^{n+a-1}(1-t)^{b-a-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\beta(n+a,b-a)$$

$$I=\Gamma(b-a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)}\frac{z^n}{n!} \quad ; \quad \gamma_n=\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)}\frac{z^n}{n!} \quad ; \quad \gamma_0=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+a)}\frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+b+1)}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n+a)}{(n+b)}\frac{z}{n+1} \quad \text{donc : } I=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}Fh(a;b;z) \quad \text{cqfd}$$

Th6 (CHU-VANDERMONDE)

$$\boxed{Fh(-n,a;c;1)=\frac{(c-a)_n}{(c)_n} \quad ; \text{ avec } n\in\mathbb{N}^* \quad a,c\in\mathbb{C} \quad c\notin -\mathbb{N}}$$

Démonstration :

On a (Euler) $Fh(a,b;c;1)=\dfrac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ posons $b=-n$, $n\in\mathbb{N}^*$

$Fh(a,-n;c;1)=\dfrac{\Gamma(c-a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+n)}$ or $\dfrac{\Gamma(c-a+n)}{\Gamma(c-a)}=(c-a+n-1)_n$ et $\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}=\dfrac{1}{(c+n-1)_n}$ d'où

$Fh(-n,a;c;1)=Fh(a,-n;c;1)=\dfrac{(c-a+n-1)_n}{(c+n-1)_n}=\dfrac{(-1)^n(c-a)_n}{(-1)^n(c)_n}=\dfrac{(c-a)_n}{(c)_n}$ cqfd

Vérification en J :

```
    'a c n'=: 14r3 ;25r7 ; 5x
    Flot (x: (((-n),a)H.c) 1x ) ,: (x: ((c-a)POC n)%(c POC n) )
0.00011537366542668956
0.00011537366533872474
    'a c n'=: 4r3 ;5r7 ; 11x
    Flot (x: (((-n),a)H.c) 1x ) ,: (x: ((c-a)POC n)%(c POC n) )
_0.014647509565753622
_0.014647509565561934
    'a c n'=: 7x ;13x ; 11x
    Flot (x: (((-n),a)H.c) 1x ) ,: (x: ((c-a)POC n)%(c POC n) )
0.0032305828509597879
0.0032305828509893659
    'a c n'=: 4x ;8x ; 5x
    Flot (x: (((-n),a)H.c) 1x ) ,: (x: ((c-a)POC n)%(c POC n) )
0.070707070707070704
0.070707070707070704
```

Th7 (EULER)

$$\boxed{Fh(a,a+\frac{1}{2};\frac{1}{2};z)=\frac{1}{2}\left[(1+z^{1/2})^{-2a}+(1-z^{1/2})^{-2a}\right]}$$

Démonstration :

$$S=(1+u)^{-2a}+(1-u)^{-2a}=\sum_{p=0}^{\infty}C_{-2a}^{p}u^{p}(1+(-1)^{p})=2\sum_{n=0}^{\infty}C_{-2a}^{2n}u^{2n}\quad;\quad\gamma_n=C_{-2a}^{2n}u^{2n}\quad;\quad\gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{C_{-2a}^{2n+2}}{C_{-2a}^{2n}}\frac{u^{2n+2}}{u^{2n}}=\frac{(-2a-2n)(-2a-2n-1)}{(2n+1)(2n+2)}u^2=\frac{(n+a)(n+a+1/2)}{n+1/2}\frac{u^2}{n+1}$$

$$\Rightarrow\quad S=2Fh(a,a+1/2;1/2;u^2)\ \text{ si } u^2=z\ \Rightarrow\ Fh(a,a+1/2;1/2;z)=(1/2)\left[(1+z^{1/2})^{-2a}+(1-z^{1/2})^{-2a}\right]\quad\text{cqfd}$$

Vérification en j :

```
    'a z' =. 3.2 ; 0.7
    (-:((1+%:z)^_2*a)+((1-%:z)^_2*a)) ,: (((a+0 1r2)H.1r2)z)
54347.329590244815
54347.329590244728

    'a z' =. 5j2 ; 0.43
    (-:((1+%:z)^_2*a)+((1-%:z)^_2*a)) ,: (((a+0 1r2)H.1r2)z)
_9243.1595354151304j_19286.638355054638
_9243.1595354151414j_19286.638355054671
```

Th8 (PFAFF) :

$$\boxed{(1-z)^{-a}Fh(a,b;c;\frac{-z}{1-z})=Fh(a,c-b;c;z) \quad ; \quad a,b,c-b\in E^{*}=\mathbb{C}-\{0,-1,-2,-3,...\}}$$

Démonstration :

$$X=(1-z)^{-a}Fh(a,b;c;\frac{-z}{1-z})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k(-z)^k}{(c)_k k!(1-z)^{a+k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k(-z)^k}{(c)_k k!}\sum_{m=0}^{\infty}C_{-a-k}^{m}(-z)^m \;\;;\text{ or }\; C_{-a-k}^{m}=(-1)^m C_{m+a+k-1}^{m}$$

$$X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k(-z)^k}{(c)_k k!}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+a+k-1}^{m}z^m=\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_k(b)_k(-1)^k}{(c)_k k!}C_{n+a-1}^{n-k}\}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}X_n z^n \;\;;\;\; X_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_k(b)_k(-1)^k}{(c)_k k!}C_{n+a-1}^{n-k}$$

$$X_n=(n+a-1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_k(b)_k(-1)^k}{(c)_k k!(n-k)!(a+k-1)!} \;\;;\;\; \gamma_k=\frac{(a)_k(b)_k(-1)^k}{(c)_k k!(n-k)!(a+k-1)!} \;\;;\;\; \gamma_0=\frac{1}{n!(a+k)!}$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{(a)_{k+1}}{(a)_k}\frac{(b)_{k+1}}{(b)_k}\frac{(c)_k}{(c)_{k+1}}\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\frac{k!}{(k+1)!}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}\frac{(a+k-1)!}{(a+k)!}=\frac{(k-n)(k+b)}{(k+c)}\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow X_n=\frac{(a+n-1)!}{n!(a-1)!}Fh(-n,b;c;1)=\frac{(a)_n}{n!}Fh(-n,b;c;1) \quad\text{ or }\quad Fh(-n,b;c;1)=\frac{(c-b)_n}{(c)_n} \;\;\text{(Chu-Vandermonde)}$$

$$X_n=\frac{(a)_n(c-b)_n}{(c)_n n!} \;\;\Rightarrow\;\; X=\sum_{n=0}^{\infty}X_n z^n=Fh(a,c-b;c;z) \quad \text{cqfd}$$

Vérification en J :

```
     'a b c z' =. 1r3 ; 2r5 ; 4r7 ; 2r10
     (((a,c-b)H.c)z)-((1-z)^-a)*(((a,b)H. c)(-z%-.z))
_4.440892098500626e_16

     'a b c z' =. 1r4 ; 2r5 ; _1r2 ; 0.23
     (((a,c-b)H.c)z)-((1-z)^-a)*(((a,b)H. c)(-z%-.z))
_2.220446049250313e_16

     'a b c z' =. 1j4 ; _2r5 ; _1j2 ; 0.2j0.15
     (((a,c-b)H.c)z)-((1-z)^-a)*(((a,b)H. c)(-z%-.z))
_2.775557561562891e_16

     'a b c z' =. 5 ; 7 ; 9 ; 0.1j_0.3
     (((a,c-b)H.c)z)-((1-z)^-a)*(((a,b)H. c)(-z%-.z))
2.220446049250313e_16j_5.551115123125783e_17

     'a b c z' =. 4 ; 6 ; 9 ; _0.8
     (((a,c-b)H.c)z)-((1-z)^-a)*(((a,b)H. c)(-z%-.z))
_4.996003610813204e_16
```

Th9 (EULER) :

$$\boxed{Fh(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}\,Fh(c-a,c-b;c;z)\quad ;\quad a,b,c-a,c-b\in E^{*}}$$

Démonstration :

$\textit{Dans } \mathbb{C} \textit{ on a} : (u=\dfrac{-z}{1-z}) \Leftrightarrow (z=\dfrac{-u}{1-u}) \textit{ et dans ce cas} : \ 1-z=\dfrac{1}{1-u}$

$\textit{On applique } 2 \textit{ fois le Th}8 \ (\textit{PFAFF}) :$

$Fh(a,b;c;z)=(1-u)^{a}\,Fh(a,c-b;c;u) \ \textit{ et } \ Fh(a,c-b;c;u)=(1-z)^{c-b}\,Fh(c-a,c-b;c;z)$

$\Rightarrow Fh(a,b;c;z)=(1-u)^{a}(1-z)^{c-b}\,Fh(c-a,c-b;c;z) \ \textit{ or } \ (1-u)^{a}=(1-z)^{-a}$

$\Rightarrow Fh(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}\,Fh(c-a,c-b;c;z)$ cqfd

Vérification en j :

```
   'a b c z' =. 3 ; 5 ; 8 ; 0.7
   (((a,b)H. c)z)-((1-z)^c-a+b)*((((c-a),c-b)H. c)z)
0

   'a b c z' =. 3j1 ; 5r2 ; 8r3 ; 0.3j0.2
   (((a,b)H. c)z)-((1-z)^c-a+b)*((((c-a),c-b)H. c)z)
_1.1102230246251565e_16j4.4408920985006262e_16

   'a b c z' =. _3r2 ; 5r3 ; 8r5 ; 4r9
   (((a,b)H. c)z)-((1-z)^c-a+b)*((((c-a),c-b)H. c)z)
5.551115123125783e_17
```

TH10 : (KUMMER)

$$\boxed{Fh(a;b;z) = e^z Fh(b-a;b;-z)}$$

Démonstration :

$$X = e^z Fh(b-a;b;-z) = (\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!})(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b-a)_i}{(b)_i}\frac{(-z)^i}{i!}) = \sum_{k=0}^{\infty}\{\sum_{i=0}^{k}\frac{(b-a)_i(-1)^i}{(b)_i(k-i)!i!}\}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}X_k z^k$$

$$X_k = \sum_{i=0}^{k}\frac{(b-a)_i(-1)^i}{(b)_i(k-i)!i!} \;\; ; \;\; \gamma_i = \frac{(b-a)_i(-1)^i}{(b)_i(k-i)!i!} \;\; ; \;\; \gamma_0 = \frac{1}{k!} \;\; ; \;\; \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{(b-a+1)_i}{(b-a)_i}\frac{(b)_i}{(b)_{i+1}}\frac{(-1)^{i+1}}{(-1)^i}\frac{(k-i)!}{(k-i-1)!}\frac{i!}{(i+1)!}$$

$$\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{(i+b-a)(i-k)}{(i+b)}\frac{1}{i+1} \Rightarrow X_k = \frac{1}{k!}Fh(-k,b-a;b;1) = \frac{1}{k!}\frac{(a)_k}{(b)_k} \quad \text{(Th6)}$$

$$\Rightarrow X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!} = Fh(a;b;z) \quad \text{cqfd}$$

Vérification en J :

```
    'a b z' =. 5x ; 9x ; 3r7
    x: ( (a H. b)z ) ,: ( (^z)*( ((b-a) H. b)-z) )
13767391697317r10825960642718
13767391697317r10825960642718

    'a b z' =. 5r3 ; 8r5 ; 4r4
    x: ( (a H. b)z ) ,: ( (^z)*( ((b-a) H. b)-z) )
1293354262679r4595509823847
1293354262679r4595509823847

    'a b z' =. 5j3 ; 8j5 ; 4j7
    ( (a H. b)z ) ,: ( (^z)*( ((b-a) H. b)-z) )
2.9799822489595202j_12.915743714100286
2.9799822489596126j_12.915743714100252
```

Th11 (GAUSS) : (sommes tronquées de binomiaux)

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m} C_a^k z^k = C_a^m z^m Fh(-m,1;a-m+1;-z^{-1}) \quad ; \; a\in E \quad m\in\mathbb{N}\\ &\sum_{k=m+1}^{\infty} C_a^k z^k = C_a^{m+1} z^{m+1} Fh(m+1-a,1;m+2;-z)\end{aligned}}$$

Démonstrations :

$$X=\sum_{k=0}^{m} C_a^k z^k=\sum_{n=0}^{m} C_a^{m-n} z^{m-n}=z^m\sum_{n=0}^{m}\frac{a!}{(m-n)!(a+n-m)!}z^{-n}=a!z^m\sum_{n=0}^{m}\frac{z^{-n}}{(m-n)!(a+n-m)!}$$

$$\gamma_n=\frac{z^{-n}}{(m-n)!(a+n-m)!} \;\; ; \;\; \gamma_0=\frac{1}{m!(a-m)!} \;\; ; \;\; \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(m-n)!}{(m-n-1)!}\frac{(a+n-m)!}{(a+n-m+1)!}\frac{z^{-n-1}}{z^{-n}}=\frac{(n-m)(n+1)}{(n+a+1-m)}\frac{-z^{-1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow X=\frac{a!z^m}{m!(a-m)!}Fh(-m,1;a+1-m;-z^{-1})=C_a^m z^m Fh(-m,1;a+1-m;-z^{-1}) \quad \text{cqfd}$$

$$X=\sum_{k=m+1}^{\infty} C_a^k z^k=\sum_{n=0}^{\infty} C_a^{m+1+n} z^{n-(m+1)}=z^{-(m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a!z^n}{(m+n+1)!(a-m-n-1)!}=a!z^{-(m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(m+n+1)!(a-m-n-1)!}$$

$$\gamma_n=\frac{z^n}{(m+n+1)!(a-m-n-1)!} \;\; ; \;\; \gamma_0=\frac{1}{(m+1)!(a-m-1)!}$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(n+m+1)!}{(n+m+2)!}\frac{(a-m-n-1)!}{(a-m-n-2)!}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(a-m-n-1)}{(n+m+2)}z=\frac{(n+m+1-a)(n+1)}{(n+m+2)}\frac{-z}{n+1}$$

$$\Rightarrow X=\frac{a!}{(a-m-1)!(m+1)!}z^{-m-1}Fh(m+1-a,1;m+2;-z)=C_a^{m+1}z^{-m-1}Fh(m+1-a,1;m+2;-z) \quad \text{cqfd}$$

Vérification en j :

```
   k=.i.m+1 [ 'a m z' =. 9 ; 5 ; 0.7
   (+/(k!a)*z^k ) ,: ( (m!a)*(z^m)*(((-m),1)H.(a+1-m))-z^_1 )
105.18141999999997
105.18141999999999

   k=.i.m+1 [ 'a m z' =. 3j4 ; 7 ; _0.35
   (+/(k!a)*z^k ) ,: ( (m!a)*(z^m)*(((-m),1)H.(a+1-m))-z^_1 )
_0.042768076388889131j_0.27218229123263926
_0.042768076388888909j_0.27218229123263843

   k=.i.m+1 [ 'a m z' =. 9r2 ; 8 ; 3r5
   (+/(k!a)*z^k ) ,: ( (m!a)*(z^m)*(((-m),1)H.(a+1-m))-z^_1 )
8.2897168902343754
8.2897168902343789

   k=.m+1+i.30 ['a m z' =. 9 ; 5 ; 0.6
   (+/(k!a)*z^k) ,: (((m+1)!a)*(z^m+1)*(((m+1-a),1)H.(m+2))-z)
5.088116735999999
5.088116735999999

   k=.m+1+i.30 ['a m z' =. 9r2 ; 7 ; _0.4j0.3
   (+/(k!a)*z^k) ,: (((m+1)!a)*(z^m+1)*(((m+1-a),1)H.(m+2))-z)
_3.4542923672859287e_6j_5.2584378005732112e_6
_3.4542923672861646e_6j_5.2584378005732848e_6
```

TH12 : (GAUSS)

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_a^n}{C_b^n}z^n = Fh(1,-a;-b;z) \quad ; \; a,b\in\mathbb{C} \quad ; \; b\notin\mathbb{N} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-a}^n C_{-b}^n}{C_{b-a-1}^n}z^n = Fh(a,b;1+a-b;-z) \quad ; \; a,b\in\mathbb{C} \quad ; \; a-b\in E\end{array}}$$

Démonstrations :

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_a^n}{C_b^n}z^n \;\; ; \;\; \gamma_{\mathrm{n}}=\frac{C_a^n}{C_b^n}z^n \;\; ; \;\; \gamma_0=1 \;\; ; \;\; \frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\frac{(b-n-1)!}{(b-n)!}\frac{(a-n)!}{(a-n-1)!}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n-a)(n+1)}{(n-b)}\frac{z}{n+1}$$

$\Rightarrow X = Fh(1,-a;-b;z)$ cqfd

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-a}^n C_{-b}^n}{C_{b-a-1}^n}z^n \;\; ; \;\; \gamma_{\mathrm{n}}=\frac{C_{-a}^n C_{-b}^n}{C_{b-a-1}^n}z^n \;\; ; \;\; \gamma_0=1 \;\; ; \;\; \frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\frac{C_{-a}^{n+1}}{C_{-a}^n}\frac{C_{-b}^{n+1}}{C_{-b}^n}\frac{C_{b-a-1}^n}{C_{b-a-1}^{n+1}}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n+a)(n+b)}{(n+a-b+1)}\frac{-z}{n+1}$$

$\Rightarrow X = Fh(a,b;a-b+1;-z)$ cqfd

Vérification en j :

```
    'a b z n'=:5r3;8r5;4r7;i.100
    (+/(n!a)*(z^n)%(n!b)) ,: (((1x,-a)H.(-b))z)
2.3754460320598767
2.3754460320598754

    'a b z n'=:5 ;8 ;0.3;i.100
    (+/(n!a)*(z^n)%(n!b)) ,: (((1x,-a)H.(-b))z)
1.2250862499999999
1.2250862499999999

    'a b z n'=:5j2 ;6j3 ;0.2j_0.3;i.100
    (+/(n!a)*(z^n)%(n!b)) ,: (((1x,-a)H.(-b))z)
1.0749775948133469j_0.31548198796703031
1.0749775948133469j_0.31548198796702981

    'a b z n' =.4j3 ; _4r5 ; 0.32 ;i.100
    (+/(n!-a)*(n!-b)*(z^n)%(n!b-a+1)) ,: (((a,b)H.(1+a-b))-z)
1.1890187646475314j0.03117161050326708
1.1890187646475314j0.031171610503267066

    'a b z n' =. _6 ; 2r3 ; 0.23 ;i.100
    (+/(n!-a)*(n!-b)*(z^n)%(n!b-a+1)) ,: (((a,b)H.(1+a-b))-z)
0.86500889926317881
0.86500889926317873
```

Th13 : Dérivées

$$\frac{d}{dz}Fh(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;z)=\frac{a_1a_2...a_p}{b_1b_2...b_q}Fh(a_1+1,a_2+1,...,a_p+1;b_1+1,b_2+1,...,b_q+1;z)$$

et pour $k\in\mathbb{N}$:

$$\frac{d^k}{dz^k}Fh(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;z)=\frac{(a_1)_k(a_2)_k...(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k...(b_q)_k}Fh(a_1+k,a_2+k,...,a_p+k;b_1+k,b_2+k,...,b_q+k;z)$$

Démonstration :

$$X=\frac{d}{dz}Fh(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;z)=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{n+1}(a_2)_{n+1}...(a_p)_{n+1}}{(b_1)_{n+1}(b_2)_{n+1}...(b_q)_{n+1}}\frac{z^n}{n!}=\frac{a_1a_2...a_p}{b_1b_2...b_q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1+1)_n(a_2+1)_n...(a_p+1)_n}{(b_1+1)_n(b_2+1)_n...(b_q+1)_n}\frac{z^n}{n!}\quad (\text{car }\ (a)_{n+1}=a(a+1)_n)$$

$$\Rightarrow X=\frac{a_1a_2...a_p}{b_1b_2...b_q}Fh(a_1+1,a_2+1,...,a_p+1;b_1+1,b_2+1,...,b_q+1;z)\quad \text{cqfd}$$

La formule à l'ordre k est juste pour $k=0$ (*car* $(a)_0=1$) *et pour* $k=1$ (*car* $(a)_1=a$); *Supposons-là juste à un ord*

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}Fh(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z)=\frac{(a_1)_{k-1}...(a_p)_{k-1}}{(b_1)_{k-1}...(b_q)_{k-1}}Fh(a_1+k-1,...,a_p+k-1;b_1+k-1,...,b_q+k-1;z)\ \textit{ on dérive les 2 memb}$$

$$\Rightarrow\frac{d^k}{dz^k}Fh(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z)=\frac{(a_1)_k...(a_p)_k}{(b_1)_k...(b_q)_k}Fh(a_1+k,...,a_p+k;b_1+k,...,b_q+k;z)\qquad (\textit{car }\ (a)_k=(a+k-1)(a)_{k-1}\ )$$

Donc (*formule juste à l'ordre k*-1) $\Rightarrow$ (*formule juste à l'ordre k*)

étant juste pour $k=0$ *et* $k=1$ $\Rightarrow$ *elle est juste pour tout* $k\in\mathbb{N}$ cqfd

TH14 : Equation différentielle d'EULER et GAUSS

L'équation différentielle linéaire du 2^e *ordre sans second membre*

$$z(1-z)y''+\left[c-(a+b+1)z\right]y'-aby=0$$

admet 2 *solutions linéairement indépendantes* ($c \in E$ *et* $|z|<1$) :

$y_1 = Fh(a,b;c;z)$ *et* $y_2 = z^{1-c}Fh(a-c+1,b-c+1;2-c;z)$ *si* $c \neq 1$

Démonstration :

$\Phi(y,y',y'') = z(1-z)y''+\left[c-(a+b+1)z\right]y'-aby=0$ *On pose* (m *et* A_k *inconnus*) :

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^{m+k} \quad ; \quad y'=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(m+k)z^{m+k-1} \quad ; \quad y''=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(m+k)(m+k-1)z^{m+k-2}$$

$$zy''=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(m+k)(m+k-1)z^{m+k-1} \quad ; \quad -z^2y''=-\sum_{k=0}^{\infty}A_k(m+k)(m+k-1)z^{m+k}$$

$$cy'=\sum_{k=0}^{\infty}A_k c(m+k)z^{m+k-1} \quad ; \quad -(a+b+1)zy'=-\sum_{k=0}^{\infty}A_k(a+b+1)(m+k)z^{m+k}$$

$$-aby=-\sum_{k=0}^{\infty}A_k abz^{m+k}$$

$$\Phi(y,y',y'')=\begin{bmatrix} -\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left[(m+k)(m+k-1)+(a+b+1)(m+k)+ab\right]z^{m+k} \\ +\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left[(m+k)(m+k+1)+c(m+k)\right]z^{m+k-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left[(k+m+a)(k+m+b)\right]z^{m+k} \\ \sum_{k=0}^{\infty}A_k\left[(k+m)(k+m+c-1)\right]z^{m+k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sum_{k=0}^{\infty}A_k\left[(k+m+a)(k+m+b)\right]z^{m+k} \\ \sum_{k=-1}^{\infty}A_{k+1}\left[(k+m+1)(k+m+c)\right]z^{m+k} \end{bmatrix}$$

$$=A_0m(m+c-1)z^{m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\{A_{k+1}\left[(k+m+c)(k+m+1)\right]-A_k\left[(k+m+a)(k+m+b)\right]\}z^{m+k}=0$$

$$\Rightarrow \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{(k+m+a)(k+m+b)}{(k+m+c)(k+m+1)} \quad \textit{on pose } A_0=1 \quad \Rightarrow \Phi(y,y',y'')=m(m+c-1)z^{m-1}=0$$

2 *solutions* : $m=0$ *et* $m=1-c$ (*si* $c\neq 1$)

$$\textit{Si } m=0 : \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)} \quad ; \quad A_0=1 \quad ; \quad y_1=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k \quad ; \quad \gamma_k=A_k z^k \quad ; \quad \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{k}+1}}{\gamma_{\mathrm{k}}}=\frac{A_{k+1}}{A_k}\frac{z^{k+1}}{z^k}=\frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)}\frac{z}{(k+1)} \qquad \Rightarrow y_1=Fh(a,b;c;z) \quad \text{cqfd}$$

$$\textit{Si } m=1-c : \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{(k+a-c+1)(k+b-c+1)}{(k+1)(k+2-c)} \quad ; \quad A_0=1 \quad ; \quad y_2=z^{1-c}\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k \quad ; \quad \gamma_k=A_k z^k \quad ; \quad \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{k}+1}}{\gamma_{\mathrm{k}}}=\frac{A_{k+1}}{A_k}\frac{z^{k+1}}{z^k}=\frac{(k+a-c+1)(k+b-c+1)}{(k+2-c)}\frac{z}{(k+1)} \qquad \Rightarrow y_2=z^{1-c}Fh(a-c+1,b-c+1;2-c;z) \quad \text{cqfd}$$

TH15 : Equation différentielle de KUMMER

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(b-z)\frac{dy}{dz}-az=0 \qquad \textit{Equation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre}$$

$\textit{admet 2 solutions particulières linéairement indépendantes (si } b\neq \textit{entier)}:$

$$y_1=Fh(a;b;z) \qquad \text{et} \qquad y_2=z^{1-b}Fh(a-b+1;2-b;z)$$

Démonstration :

$$\textit{Dans } \Phi(y,y',y")=z\frac{d^2y}{dz^2}+(b-z)\frac{dy}{dz}-ay=0 \textit{ substituons :}$$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^{k+m} \;;\; \frac{dy}{dz}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+m)z^{k+m-1} \;;\; \frac{d^2y}{dz^2}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+m)(k+m-1)z^{k+m-2} \;;\; \textit{à calculer : } m, A_k,\, k\in\mathbb{N}$$

On a :

$$z\frac{d^2y}{dz^2}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+m)(k+m-1)z^{k+m-1} \;;\; -z\frac{dy}{dz}=-\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+m)z^{k+m}$$

$$b\frac{dy}{dz}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k b(k+m)z^{k+m-1} \;;\; -ay=-\sum_{k=0}^{\infty}A_k a z^{k+m}$$

$$\Rightarrow 0=\Phi(y,y',y")=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+m)(k+b+m-1)z^{k+m-1}-\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+a+m)z^{k+m}$$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}A_{k+1}(k+m+1)(k+b+m)z^{k+m}-\sum_{k=0}^{\infty}A_k(k+a+m)z^{k+m}$$

$$=A_0 m(b+m-1)z^{m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\{A_{k+1}(k+m+1)(k+b+m)-A_k(k+a+m)\}z^{k+m}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{(k+a+m)}{(k+m+1)(k+b+m)} \quad \textit{on choisit } A_0=1 \;;\; \textit{il reste :}$$

$$0=\Phi(y,y',y")=m(b+m-1)z^{m-1} \quad\Rightarrow\quad 2 \textit{ solutions : } m=0 \textit{ et } m=1-b$$

$$\textit{Si } m=0 : \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{(k+a)}{(k+1)(k+b)} \qquad \Rightarrow\; y_1=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k \;;\; \gamma_k=A_k z^k \;;\; \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{A_{k+1}z^{k+1}}{A_k z^k}=\frac{(k+a)}{(k+b)}\frac{z}{(k+1)} \qquad \Rightarrow\; y_1=Fh(a;b;z) \quad \text{cqfd}$$

$$\textit{Si } m=1-b : \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{(k+a-b+1)}{(k+2-b)(k+1)} \qquad \Rightarrow\; y_2=z^{1-b}\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k \;;\; \gamma_k=A_k z^k \;;\; \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{A_{k+1}z^{k+1}}{A_k z^k}=\frac{(k+a-b+1)}{(k+2-b)}\frac{z}{(k+1)} \qquad \Rightarrow\; y_2=z^{1-b}Fh(a-b+1;2-b;z) \quad \text{cqfd}$$

FONCTIONS CLASSIQUES CALCULABLES AVEC LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

$$\cos(z) = Fh(;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}) \qquad \mathrm{ch(z)} = Fh(;\frac{1}{2};\frac{z^2}{4})$$

$$\sin(z) \;=\; z.Fh(;\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}) \qquad \mathrm{sh(z)} = \mathrm{z}.Fh(;\frac{3}{2};\frac{z^2}{4})$$

$$e^z = Fh(;;z) \qquad Log(1+z) = z.Fh(1,1;2;-z)$$

$$Arc\sin(z) = z.Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2) \qquad Argsh(z) = z.Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2)$$

$$Arctg(z) = z.Fh(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2) \qquad Argth(z) = \frac{1}{2}Log(\frac{1+z}{1-z}) = z.Fh(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2)$$

$$\frac{1}{\mathrm{1\text{-}}z} = Fh(1;;z) \qquad z^{-\nu} = Fh(\nu;;1-z) \qquad (1-z)^{-\nu} = Fh(\nu;;z)$$

$$Fh(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-1) = Arctg(1) = \frac{\pi}{4} \qquad Fh(;1;1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}$$

Démonstrations :

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \;;\; \gamma_{\mathrm{n}} = (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \;;\; \gamma_0 = 1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\frac{z^{2n+2}}{z^{2n}} = -\frac{z^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{(n+\frac{3}{2})}\frac{(\frac{-z^2}{4})}{(n+1)}$$

$$donc\;\; \sin(z) = zFh(;\frac{3}{2};\frac{-z^2}{4}) \quad \text{et} \quad sh(z) = \frac{1}{i}\sin(iz) = zFh(;\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}) \quad \text{cqfd}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \;;\; \gamma_n = (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \;;\; \gamma_0 = 1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{z^{2n+2}}{z^{2n}} = -\frac{z^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})}\frac{(-\frac{z^2}{4})}{(n+1)} \;\text{ donc :}$$

$$\cos(z) = Fh(;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}) \;\text{ et }\; ch(z) = \cos(iz) = Fh(;\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}) \quad \text{cqfd}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \;;\; \gamma_n = \frac{z^n}{n!} \;;\; \gamma_0 = 1 \;;\; \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{n!}{(n+1)!}\frac{z^{n+1}}{z^n} = \frac{z}{n+1} \;\text{ donc }\; e^z = Fh(;;z) \;\; \text{cqfd}$$

$$Log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n+1} \;;\; \gamma_n = (-1)^n\frac{z^n}{n+1} \;;\; \gamma_0 = 1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{n+1}{n+2}\frac{z^{n+1}}{z^n} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)}\frac{-z}{n+1} \;\text{ donc }\; Log(1+z) = zFh(1,1;2;-z) \;\; \text{cqfd}$$

$$Arc\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{z^{2n}}{2n+1}\ ;\ \gamma_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{z^{2n}}{2n+1}\ ;\ \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{2^{2n}}{2^{2n+2}}\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}\frac{(2n+1)}{(2n+3)}\frac{z^{2n+2}}{z^{2n}}=\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n+\frac{3}{2})}\frac{z^2}{n+1}\ \text{donc :}$$

$$Arc\sin(z)=zFh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2)\quad \text{et}\ Argsh(z)=Log(z+\sqrt{z^2+1})=\frac{1}{i}Arc\sin(iz)=zFh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2)\quad \text{cqfd}$$

$$Arctg(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n+1}\ ;\ \gamma_n=(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n+1}\ ;\ \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{2n+1}{2n+3}\frac{z^{2n+2}}{z^{2n}}=\frac{(n+\frac{1}{2})(n+1)}{(n+\frac{3}{2})}\frac{(-z^2)}{(n+1)}\quad \text{donc :}$$

$$Arctg(z)=zFh(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2)\ \text{ et }\ Argth(z)=\frac{1}{2}Log(\frac{1-z}{1+z})=\frac{1}{i}Arctg(iz)=zFh(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2)\quad \text{cqfd}$$

$$Arctg(1)=Fh(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-1)=\frac{\pi}{4}\quad \text{cqfd}$$

$$(1-z)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{-\nu}^{n}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu)_n}{n!}z^n\ ;\ \gamma_n=\frac{(\nu)_n}{n!}z^n\ ;\ \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{(\nu)_{n+1}}{(\nu)_n}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n+\nu)}{(n+1)}z\ \text{ donc }\ (1-z)^{-\nu}=Fh(\nu;;z)$$

si on change $z\to 1\text{-}z$ on a $z^{-\nu}=Fh(\nu;;1-z)$ et pour $\nu=1$: $\frac{1}{1\text{-}z}=\ Fh(1;;z)$ cqfd

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\ ;\ \gamma_n=\frac{1}{(n!)^2}\ ;\ \gamma_0=1\ ;\ \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=\frac{1}{(n+1)^2}\ \text{ donc }\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}=Fh(;1;1)\ \text{ cqfd}$$

Vérifications en j :

```
   ('' H. 1x) 1      NB. ∑_{k=0}^{∞} 1/(k!)^2
2.27958530233607
   x:^:_1 +/ %*:!N =. i.100x
2.27958530233607
```

```
   53r100 H. '' 0.7
1.89289156083216
   (1-0.7)^_53r100    NB. (1−0.7)^(53/100)
1.89289156083215
```

```
   ('' H. 1r2) _1r4**: 2.74256
_0.921437265434076
   2 o. 2.74256     NB. cos
_0.921437265434076
```

```
   (*('' H. 3r2)@(_1r4&*@*:)) 0.4567
0.44098872179534032
   1 o. 0.4567         NB. sin
0.44098872179534032
```

```
 ('' H. 1r2) 1r4**: 2.84516
8.6312180522526933
   6 o. 2.84516  NB. ch
8.6312180522526916
```

```
  (3 : 'y*('''' H. 3r2)1r4**:y') 1.85638
3.1221438483311936
   5 o. 1.85638        NB. sh
3.1221438483311932
```

```
   (* 1 1x H.2x@-) 0.67423
0.51535335808936755

 ^. 1+ 0.67423   NB.  Log(1+0.67423)
0.515353358089368
```

```
   (3r7 H. '')-. 0.67432
1.1839766170167425

   0.67432^_3r7     NB.  0.67432^(−3/7)
1.1839766170167434
```

```
   (* 1r2 1r2 H.3r2@*:) 0.24685
0.24942830864519552
   _1 o. 0.24685    NB.  Arcsin(0.24685)
0.24942830864519552
```

```
   (* 1r2 1r2 H.3r2@-@*:) 0.795349
0.72903231396174595
   _5 o. 0.795349    NB.  Argsh(0.795349)
0.72903231396174617
```

```
   (* 1r2 1 H. 3r2 @-@*:) 0.435261
0.41052960560528245
   _3 o. 0.435261    NB. Arctg(0.435261)
0.41052960560528229
```

```
   (* 1r2 1 H. 3r2 @*:) 0.319856
0.33148668913171264
   _7 o. 0.319856 NB.  Argth(0.319856)
0.33148668913171253
```

Algorithme de calcul de PI :

$$\sin(\frac{\pi}{2}-z)=\cos(z) \iff (p-z)Fh(;\frac{3}{2};-\frac{(p-z)^2}{4})=Fh(;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}) \text{ où } p=\frac{\pi}{2}$$

$$p=z+\frac{Fh(;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4})}{Fh(;\frac{3}{2};-\frac{(p-z)^2}{4})}$$ d'où la formule itérative :

$$p_k=z+\frac{Fh(;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4})}{Fh(;\frac{3}{2};-\frac{(p_{k-1}-z)^2}{4})}$$ qui converge plus ou moins vite $\forall z \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Un rapide essai permet de trouver z=1.6 avec initialisation à $y = 2p_0 = 3.14$

```
Iter =: 3 : '+:Z+(''''H.(1r2)-*:Z%2)%(''''H.(3r2)_1r4**:Z-y%2)'
    ,.Iter^:(i.6) 3.14 [ Z=.1.6
3.1400000000000001
3.14159219462086
3.1415926534593073
3.1415926535897558
3.1415926535897931     NB. 4 itérations suffisent
3.1415926535897931
    1p1                NB. Vérification
3.1415926535897931
```

FONCTIONS SPÉCIALES AVEC PROGRAMMATION EN J

Fonction d’erreur

$$\boxed{erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}.Fh(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2)}$$

Démonstration :

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n}}{2n+1}\ ;\ \gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n}}{2n+1}\ ;\ \gamma_0 = 1$$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{2n+1}{2n+3}\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} = \frac{(n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{3}{2})}\frac{(-x^2)}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x e^{-t^2}dt = xFh(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2) \qquad \text{cqfd}$$

En J : `Fherf =: 2p_1r2*]*1r2 H. 3r2@-@*:`

Utilisation : `Res =. Fherf x   (où 0 ≤ x )`

Ex : `Fherf 0.8` NB. Fonction erf(0.8)

```
0.74210096470766063
    2p_1r2*50((3 :'^-*:y')INCC 7 )0 0.8
0.74210096470766196
```

NB. Intégr méthode de Newton-Cotes

Fonction Gamma incomplète

$$\boxed{\gamma(p,x) = \int_0^x e^{-t}t^{p-1}dt = \frac{x^p}{p}Fh(p;p+1;-x)}$$

Démonstration

$$\int_0^x e^{-t}t^{p-1}dt = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n t^{p-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{n+p-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{n+p}}{n+p}\ ;\ \gamma_0 = \frac{x^p}{p}\ ;\ \gamma_{\text{n}} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{n+p}}{n+p}$$

$$\frac{\gamma_{\text{n+1}}}{\gamma_{\text{n}}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{n+p}{n+p+1}\frac{x^{n+p+1}}{x^{n+p}} = \frac{(n+p)}{(n+p+1)}\frac{(-x)}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x e^{-t}t^{p-1}dt = \frac{x^p}{p}Fh(p;p+1;-x) \qquad \text{cqfd}$$

En J : `Fhgi =: 1 :'((y^m)%m)*(m H.(m+1))-y'`

Utilisation : `Res =. p Fhgi x     ( où 0 ≤ x )`

Ex: `2.3 Fgi 1.7` NB. Fonction gamma incomplète $\int_0^{1.7} e^{-t}t^{2.3-1}dt$

```
0.486337856130
    1500 ((3 : '(^-y)*y^1.3')INCC 7)0 1.7
0.486337856148
```

NB. Intégr méthode de Newton-Cotes

Fonction Beta incomplète

Fonction Beta incomplète : $\beta(p,q,x)=\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{x^p}{p}Fh(p,1-q;p+1;x)$

Démonstration :

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1}=t^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}C_{q-1}^{k}(-t)^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_{q-1}^{k}(-1)^k t^{k+p-1}$$

$$\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}C_{q-1}^{k}(-1)^k t^{k+p-1}dt=\sum_{k=0}^{\infty}C_{q-1}^{k}(-1)^k\int_0^x t^{k+p-1}dt=\sum_{k=0}^{\infty}C_{q-1}^{k}(-1)^k\frac{x^{k+p}}{k+p}$$

$$\gamma_k=C_{q-1}^{k}(-1)^k\frac{x^{k+p}}{k+p}\ ;\ \gamma_0=\frac{x^p}{p}\ ;\ \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{C_{q-1}^{k+1}}{C_{q-1}^{k}}\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\frac{k+p}{k+p+1}\frac{x^{k+p+1}}{x^{k+p}}=\frac{q-k-1}{k+1}\frac{k+p}{k+p+1}(-x)=\frac{(k+p)(k-q+1)}{(k+p+1)}x$$

donc $\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{x^p}{p}Fh(p,1-q;p+1;x)$ cqfd

En J : `Fhbi =: 1 : '((y^p)%p)*(p,1-q)H.(p+1)y[''p q''=.m'`

Utilisation : `Res =. (p,q) Fhbi x   ( où 0 < x < 1)`

Ex :
```
    3.2 1.7 Fhbi 0.7
0.058089503038215189
    10000 ((3 : '(y^3.2-1)*(1-y)^1.7-1') INCC 7) 0 0.7
0.058089503038215258
```

Z-Series (voir article Z-series : le verbe Z)

$$\boxed{Z_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = zFh(k\ fois\ 2; k-1\, fois\ 1; z)\ \ ;\ \ k \in \mathbb{N}\ \ ;\ \ z \in \mathbb{C}\ \ |z|<1}$$

Démonstration :

$$Z_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^{n-1} = z\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^k z^n \ \ ;\ \gamma_{\mathrm{n}} = (n+1)^k z^n\ ;\ \gamma_0 = 1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}} = \frac{(n+2)^k}{(n+1)^k}\frac{z^{n+1}}{z^n} = \frac{(n+2)^k}{(n+1)^{k-1}}\frac{z}{n+1} \text{ donc : } \ Z_k(z) = zFh(k\ fois\ 2; k\text{ -}1\, fois\ 1; z) \text{ cqfd}$$

En J :

```
FhZ =: 1 : 'y*((m$2) H. ((m-1)$1))y'
```

Utilisation :

```
Res =. k FhZ z
```

$k \in \mathbb{N}$ $z \in \mathbb{C}$ $|z|<1$

Ex1 : `5x Z 8r9`

NB. $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \frac{8^n}{9^n}$

```
44945352
    x: 5x FhZ 8r9
44945352
```

Ex2 : `Flot E 7x Z 89r90`

```
207481162950482606l0
2.07481162950482620e19
    Flot E x: 7x FhZ 89r90
207481162950487449 60
2.07481162950487452e19
```

NB. Valeur exacte

Fonction MULTILOG

$$\boxed{Li_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}=zFh(k+1\,fois\ 1;k\ fois\ 2;z)\ \ ;\ k\in\mathbb{N}\ \ ;\ \ z\in\mathbb{C}\ \ |z|<1}$$

Démonstration :

$$Li_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}=z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n^k}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)^k}\ \ ;\ \gamma_{\mathrm{n}}=\frac{z^n}{(n+1)^k}\ \ ;\gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\frac{(n+1)^k}{(n+2)^k}\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{(n+1)^{k+1}}{(n+2)^k}\frac{z}{n+1}\quad \text{donc : } Li_k(z)=zFh(k+1\,fois\ 1;\ k\ fois\ 2;\ z)\quad \text{cqfd}$$

En J : `FhLi =: 1 : '*((1,m$1)H.(m$2))'`

Utilisation : `Res =. k FhLi z`

```
Ex1 : 2 FhLi 2r5                                    NB. dilog
0.44928297447128157                                 NB. précision du flottant
    Flot +/(2r5^N)%N^2x [ N=.1x+i.100x
0.44928297447128163

Ex2 : 3 FhLi  1r8j2r9                               NB. trilog
0.12014238478049152j0.2290805044408849              NB. nb complexe
    Flot +/(1r8j2r9^N)%N^3x [ N=.1x+i.100x
0.12014238478049152j0.2290805044408849              NB. vérification

Ex3 : 4 FhLi 0.2 0.7                                NB. quadrilog
0.20260558286083372 0.73621724094913821
    Flot +/(0.2^N)%N^4x [ N=.1x+i.100x
0.2026055828608338
    Flot +/(0.7^N)%N^4x [ N=.1x+i.100x
0.73621724094913832
```

FONCTIONS DE BESSEL

Fonctions de Bessel 1^{e} espèce : $\nu \in E$; $z \in \mathbb{C}$

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}(\nu - \frac{1}{2})}(\frac{z}{2})^\nu \int_0^1 \cos(zt)(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!}(\frac{z}{2})^{2k} = \frac{1}{\nu!}(\frac{z}{2})^\nu Fh(;\nu+1;-\frac{z^2}{4})$$

Fonctions de Bessel 2^{e} espèce : $\nu \in E$; $z \in \mathbb{C}$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}(\nu - \frac{1}{2})}(\frac{z}{2})^\nu \int_{-1}^1 e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(\nu+k)!}(\frac{z}{2})^{2k} = \frac{1}{\nu!}(\frac{z}{2})^\nu Fh(;\nu+1;\frac{z^2}{4})$$

Remarque : les 2 formes intégrales convergent pour $\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$ et les 2 séries $\forall \nu \in \mathbb{C}$

On a $I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$ où $i = \sqrt{-1}$

Démonstration :

$$(\frac{z}{2})^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!}(\frac{z}{2})^{2k} \ ; \ \gamma_k = \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!}(\frac{z}{2})^{2k} \ ; \ \gamma_0 = \frac{1}{\nu!}$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k} \frac{k!}{(k+1)!} \frac{(k+\nu)!}{(k+\nu+1)!} \frac{z^{2k+2}}{z^{2k}} \frac{2^{2k}}{2^{2k+2}} = \frac{1}{(k+\nu+1)} \frac{1}{k+1}(\frac{-z^2}{4})$$

donc $J_\nu(z) = \frac{1}{\nu!}(\frac{z}{2})^\nu Fh(;\nu+1;\frac{-z^2}{4})$ et $I_\nu(z) = i^{-\nu} J(iz) = \frac{1}{\nu!}(\frac{z}{2})^\nu Fh(;\nu+1;\frac{z^2}{4})$ cqfd

En J :

```
FhJ =: 1 : '(%!m)*((y%2)^m)*(''''H.(m+1)) -*:y%2'
FhI =: 1 : '(%!m)*((y%2)^m)*(''''H.(m+1))  *:y%2'
```

NB. 1^{e} espèce

NB. 2^{e} espèce

Utilisation : `Res =. v  FhJ  z` ; `Res =. v  FhI  z`

Ex1 : `3.5 FhJ 5.2`

```
0.39669015914511746
```

Ex2 : `3.5 FhI 5.2`

```
9.3329866540770912
```

Ex3 : `1 FhJ  4.4`

```
_0.20277552192308659
```

Ex4 : `0 FhJ  16.6`

```
_0.19482785583893 25
```

INTÉGRALES ELLIPTIQUES COMPLÈTES ($0<|z|<1$) :

1^e espèce :

$$K(z)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2t^2)}}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2z^{2n}=\frac{\pi}{2}Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2)$$

2^e espèce :

$$E(z)=\int_0^1\sqrt{\frac{(1-z^2t^2)}{(1-t^2)}}dt=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{z^{2n}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{2}Fh(\frac{1}{2},\frac{-1}{2};1;z^2)$$

Démonstrations :

$$K(z)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2t^2)}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^{-1/2}}{\sqrt{1-u}}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/2}^{n}(-z^2u)^n du\ =\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/2}^{n}(-1)^n z^{2n}\int_0^1 u^{(n+1/2)-1}(1-u)^{1/2-1}du$$

(chgt de variable $u=t^2$)

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_{-1/2}^{n}z^{2n}\beta(n+1/2,1/2)=\frac{\Gamma(1/2)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_{-1/2}^{n}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!}z^{2n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma(\frac{1}{2})\right]\frac{z^{2n}}{n!}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2z^{2n}\ \Rightarrow\ \frac{2}{\pi}K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2z^{2n}\ ;\ \gamma_{\mathrm{n}}=\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2z^{2n}\ ;\ \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\left[\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\right]^2\frac{2^{4n}}{2^{4n+4}}\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^4\frac{z^{2n+2}}{z^{2n}}=\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n+1)}\frac{z^2}{n+1}\qquad\Rightarrow\qquad K(z)=\frac{\pi}{2}Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2)\quad \text{cqfd}$$

$$E(z)=\int_0^1\frac{\sqrt{1-z^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^{-1/2}\sqrt{1-z^2u}}{\sqrt{1-u}}du=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^{-1/2}}{\sqrt{1-u}}\sum_{n=0}^{\infty}C_{1/2}^{n}(-z^2u)^n du=\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_{1/2}^{n}\mathrm{z}^{2\mathrm{n}}\int_0^1\mathrm{u}^{(\mathrm{n}+1/2)-1}(1-u)^{1/2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_{1/2}^{n}\beta(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2})\mathrm{z}^{2\mathrm{n}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_{1/2}^{n}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!}\mathrm{z}^{2\mathrm{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}\right]\left[\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}\right]\frac{z^{2n}}{n!}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{z^{2n}}{(1-2n)}\ \ ;\ \gamma_{\mathrm{n}}=(-1)^n\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{z^{2n}}{(1-2n)}\ \ ;\ \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{n+1}}}{\gamma_{\mathrm{n}}}=\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\left[\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\right]^2\frac{2^{4n}}{2^{4n+4}}\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^4\frac{2n-1}{2n+1}\frac{z^{2n+2}}{z^{2n}}=\frac{-(2n+2)^2(2n+1)^2(2n-1)z^2}{(n+1)^4 2^4(2n+1)}=\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{(n+1)}\frac{(-z^2)}{n+1}$$

$$\Rightarrow\qquad E(z)=\frac{\pi}{2}Fh(\frac{1}{2},\frac{-1}{2};1;-z^2)\qquad \text{cqfd}$$

En J :

```
FhK =: 1r2p1*((1r2  1r2) H. 1 )@*:
```

```
FhE =: 1r2p1*((1r2 _1r2) H. 1)@-@*:
```

Utilisation :

```
Res =. FhK Z
```

NB. 1^e espèce

```
Res =. FhE z
```

NB. 2^e espèce

Ex1 : `FhK 0.8`

```
1.9953027776647294
```

Ex2 : `FhK 0.55 0.2345 0.128765`

```
1.7153544956447948 1.5930855447442698 1.5773688786300912
```

Ex3 : `FhE 0.7`

```
1.7484065152056045
```

Ex4 : `FhE 0.543 0.63877`

```
1.6808612962365035 1.7204823344151297
```

Moyenne arithmético-géométrique de 2 nombres tels que 0 < b < a

$$M_{ag}(a,b) = \frac{a}{Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\frac{b^2}{a^2})} \quad \text{où} \quad 0<b<a$$

Démonstration (utilisation d'éléments de l'article « Intégrales elliptiques ») :

$$F(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2t^2)}} = \frac{\pi}{2Mag(1,k)} = \frac{a\pi}{2aMag(1,k)} = \frac{a\pi}{2Mag(a,b)} \quad \Rightarrow \quad Mag(a,b) = \frac{a\pi}{2F(z)} \quad \text{(A)}$$

en posant $0<z<1$; $0<k<1$; $k^2+z^2=1$; $k=b/a$; $z=\sqrt{1-(b/a)^2}$; $0<b<a$

Or : $F(z) = \frac{\pi}{2}Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2F(z)} = \frac{1}{Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2)}$ (B)

$(A,B) \Rightarrow Mag(a,b) = a/Fh(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\frac{b^2}{a^2})$ cqfd

Vérification en J

```
Mag   =: {.@((-:@+/,%:@*/)^:_)              NB. Calcul direct
Magfh =: >./% 1r2 1r2 H.1@-.@*:@(<./%>./)  NB. Avec ft hypergéométrique
```

```
    Mag 4 5
4.4860571605752053
    Magfh 4 5
4.486057160575208

    Mag 27.5381 52.8643
39.171275546086001
    Magfh 27.5381 52.8643
39.171275546085965

    Mag 0.25876 0.47831
0.36012195252331347
    Magfh 0.25876 0.47831
0.36012195252331342

    Mag 12345 67890
34306.166127557735
    Magfh 12345 67890
34306.166127557786

    Mag 67890 12345
34306.166127557735
    Magfh 67890 12345
34306.166127557786
```

POLYNÔMES SPÉCIAUX

Polynomes de Laguerre

$$L_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k n!}{(k!)^2(n-k)!}z^k = Fh(-n;1;z) \quad ; \; n\in\mathbb{N} \; ; z\in\mathbb{C}$$

$$L_n^{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha+n)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!}z^k = C_{n+\alpha}^{n}Fh(-n;\alpha+1;z) \quad ; \; \alpha\in\mathbb{C}\;,\;\alpha\notin-\mathbb{N}^{*}\text{(généralisés)}$$

Démonstration :

$$L_n^{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha+n)!}{(k!)(n-k)!(\alpha+k)!}z^k \quad ; \gamma_k=\frac{(-1)^k(\alpha+n)!}{(k!)(n-k)!(\alpha+k)!}z^k \; ; \gamma_0=\frac{(\alpha+n)!}{n!\alpha!}=C_{n+\alpha}^{n}$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}\frac{(\alpha+k)!}{(\alpha+k+1)!}\frac{z^{k+1}}{z^k}=\frac{(k-n)}{(k+\alpha+1)}\frac{z}{k+1} \quad \text{donc :}$$

$$L_n^{\alpha}(z)=C_{n+\alpha}^{n}Fh(-n;\alpha+1;z) \quad \text{et} \quad L_n(z)=L_n^{0}(z)=Fh(-n;1;z) \qquad \text{cqfd}$$

En J :

```
FhL =: 1 : '(N !N+a)*(-N)H.(a+1) y [ ''N a'' =. 2{.m,0'
```

Utilisation :

`Res =.     n  FhL z` NB. $L_n(z)$

`Res =. (n,α) FhL z` NB. $L_n^{\alpha}(z)$

Ex1 :

```
   5 FhL 6.2
_3.5174026666666691
```

Ex2 :

```
   5 2r3 FhL 6.2
_5.2637834622771456
```

Ex3 :

```
   6 2j1 FhL 6.2
_8.986394133333139j_0.67445822222209628
```

Polynomes d’Euler

$$\boxed{E_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_{2n}^{2k}\,\frac{z^{2k}}{(2n)^{2k}}=Fh(-n,-n+\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{-z^2}{4n^2})}$$ polynômes de degré 2n

Démonstration :

$$E_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_{2n}^{2k}\,\frac{z^{2k}}{(2n)^{2k}}\quad;\quad \gamma_k=(-1)^k\,C_{2n}^{2k}\,\frac{z^{2k}}{(2n)^{2k}}\quad;\quad \gamma_0=1$$

$$\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\frac{C_{2n}^{2k+2}}{C_{2n}^{2k}}\frac{(2n)^{2k}}{(2n)^{2k+2}}\frac{z^{2k+2}}{z^{2k}}=(-1)\frac{(2k)!}{(2k+2)!}\frac{(2n-2k)!}{(2n-2k-2)!}\frac{z^2}{(2n)^2}=\frac{(2n-2k)(2n-2k-1)}{(2k+2)(2k+1)}\frac{(-z^2)}{(2n)^2}$$

$$=\frac{(k-n)(k-n+\frac{1}{2})}{(k+\frac{1}{2})}\frac{(-(\frac{z}{2n})^2)}{k+1}\quad\Rightarrow E_n(z)=Fh(-n,\frac{1}{2}-n;\frac{1}{2};-(\frac{z}{2n})^2)\quad \text{cqfd}$$

En J `EULfh =: 4 : '(((-x),1r2-x)H. 1r2) -*:y%2*x'` NB. $E_n(z)$

Utilisation : `Res =.  n EULfh z`

Vérification :

```
    'n z k'=. 3 ; 5.2 ; i.50
    (+/(_1^k)*((2*k)!2*n)*(z%2*n)^2*k ) ,: (n EULfh z)
_2.2279009272976680
_2.2279009272976675

    'n z k'=. 5; 3.7 ;i.50
    (+/(_1^k)*((2*k)!2*n)*(z%2*n)^2*k ) ,: (n EULfh z)
_1.7478063741910796
_1.7478063741910799

    'n z k'=. 6; 3j2 ;i.50
    (+/(_1^k)*((2*k)!2*n)*(z%2*n)^2*k ) ,: (n EULfh z)
_3.5032952068785574j_2.4119185598603692
_3.5032952068785574j_2.4119185598603683
```

Polynômes de Jacobi

$$\boxed{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+\alpha)!(n+\alpha+\beta+k)!}{k!(n-k)!(k+\alpha)!(n+\alpha+\beta)!}(\frac{z-1}{2})^k=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}Fh(-n,1+n+\alpha+\beta;1+\alpha;\frac{1-z}{2})}$$

Démonstration :

$$P_n^{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+\alpha)!(n+\alpha+\beta+k)!}{k!(n-k)!(k+\alpha)!(n+\alpha+\beta)!}(\frac{z-1}{2})^k=\frac{(n+\alpha)!}{(n+\alpha+\beta)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+n+\alpha+\beta)!}{k!(n-k)!(k+\alpha)!}(\frac{z-1}{2})^k$$

$$\gamma_k=\frac{(k+n+\alpha+\beta)!}{k!(n-k)!(k+\alpha)!}(\frac{z-1}{2})^k \quad ; \quad \gamma_0=\frac{(n+\alpha+\beta)!}{n!\alpha!} \quad ; \quad \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}=\frac{(k+(n+\alpha+\beta))(k-n)}{(k+(\alpha+1))}\frac{(\frac{1-z}{2})}{(k+1)}$$

$$\Rightarrow \quad P_n^{\alpha,\beta}(z)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}Fh(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-z}{2}) \qquad \text{cqfd}$$

En J :

```
JACfh =: 2 : '(((a+1)POC n)%!n)*(((-n),1+n+a+b)H.(a+1))-:-.y[''a b''=.m'
```

Utilisation : `Res =. ((α,β) JACfh n) z` NB. $P_n^{\alpha,\beta}(z)$

Polynômes de Legendre

$$\boxed{P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}(\frac{z-1}{2})^k=Fh(-n,n+1;1;\frac{1-z}{2})}$$

Démonstration :

$$P_n(z)=P_n^{0,0}(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}(\frac{z-1}{2})^k=Fh(-n,n+1;1;\frac{1-z}{2})\qquad \text{cqfd}$$

En J `Pfh =: 1 : '(((-m),m+1)H. 1) -:-.y'`

Utilisation : `Res =. n   Pfh  z` NB. $P_n(z)$

Polynômes de Gegenbauer

$$\boxed{C_n^{\nu}(z)=\frac{(2\nu)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+2\nu)_k}{(\nu+\frac{1}{2})_k}\frac{(\frac{z-1}{2})^k}{k!}=\frac{(2\nu)_n}{n!}Fh(-n,2\nu+n;\nu+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2})}$$

Démonstration :

$$C_n^{\nu}(z)=\frac{(2\nu)_n}{(\nu+\frac{1}{2})_n}P_n^{\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}}(z)=\frac{(2\nu)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+2\nu)_k}{(\nu+\frac{1}{2})_k}\frac{(\frac{z-1}{2})^k}{k!}=\frac{(2\nu)_n}{n!}Fh(-n,2\nu+n;\nu+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2})\quad \text{cqfd}$$

En J :

```
GEGfh =: 2 : '(((+:m)POC n)%!n)*(((-n),n++:m)H.(m+1r2))-:-.y'
```

Utilisation : `Res =. (v  GEGfh  n) z` NB. $C_n^{\nu}(z)$

Polynômes de Tchebychev (1^e espèce)

$$T_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(n)_k}{(\frac{1}{2})_k}\frac{(\frac{1-z}{2})^k}{k!}=Fh(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-z}{2})$$

$$T_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(n)_k}{(\frac{1}{2})_k}\frac{(\frac{1-z}{2})^k}{k!}=Fh(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-z}{2})$$

Polynômes de Tchebychev (2^e espèce)

$$U_n(z)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(n+2)_k}{(\frac{3}{2})_k}\frac{(\frac{1-z}{2})^k}{k!}=Fh(-n,n+2;\frac{3}{2};\frac{1-z}{2})$$

Démonstrations :

$$T_n(z)=\frac{n!}{(\frac{1}{2})_n}P_n^{\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(n)_k}{(\frac{1}{2})_k}\frac{(\frac{1-z}{2})^k}{k!}=Fh(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-z}{2})\quad \text{cqfd}$$

$$U_n(z)=\frac{(n+1)!}{(\frac{3}{2})_k}P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(n+2)_k}{(\frac{3}{2})_k}\frac{(\frac{1-z}{2})^k}{k!}=(n+1)Fh(-n,n+2;\frac{3}{2};\frac{1-z}{2})\quad \text{cqfd}$$

En J :

```
Tfh =: 1 : '((m,-m)H. 1r2) -:-.y'            NB. 1e espèce
Ufh =: 1 : '(m+1)*(((-m),m+2)H. 3r2)-:-.y'   NB. 2e espèce
```

Utilisation :

```
Res =.   n  Tfh  z    ou   Res =. n  Ufh  z
```

Polynômes de Hermite

$$H_{2n}(z)=(2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(2k)!(n-k)!}(2z)^{2k}=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}Fh(-n;\frac{1}{2};z^2)\qquad \text{degrés pairs}$$

$$H_{2n+1}(z)=(2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)!(n-k)!}(2z)^{2k+1}=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}(2z)Fh(-n;\frac{3}{2};z^2)\qquad \text{degrés impairs}$$

Démonstrations :

$$H_{2n}(z)=(-1)^n(2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!(n-k)!}(2z)^{2k}\ ;\ \gamma_{\mathrm{k}}=\frac{(-1)^{k}}{(2k)!(n-k)!}(2z)^{2k}\ ;\ \gamma_0=\frac{1}{n!}$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{k+1}}}{\gamma_{\mathrm{k}}}=\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\frac{(2k)!}{(2k+2)!}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}\frac{(2z)^{2k+2}}{(2z)^{2k}}=\frac{(k-n)}{(k+\frac{1}{2})}\frac{z^2}{k+1}\ \Rightarrow\ H_{2n}(z)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}Fh(-n;\frac{1}{2};z^2)\quad \text{cqfd}$$

$$H_{2n+1}(z)=(-1)^n(2n+1)!(2z)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!(n-k)!}(2z)^{2k}\ ;\ \gamma_{\mathrm{k}}=\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!(n-k)!}(2z)^{2k}\ ;\ \gamma_0=\frac{1}{n!}$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{k+1}}}{\gamma_{\mathrm{k}}}=\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}\frac{(2z)^{2k+2}}{(2z)^{2k}}=\frac{(k-n)}{(k+\frac{3}{2})}\frac{z^2}{k+1}\ \Rightarrow\ H_{2n+1}(z)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}(2z)Fh(-n;\frac{3}{2};z^2)\quad \text{cqfd}$$

En J :

```
Hfh=:1 :'(_1^N)*(N!m)*((+:y)^I)*((-N)H.(1r2+I))*:y[I=.m>+:N=.<.-:m'
```

Utilisation : `Res=. n Hfh z` NB. $H_n(z)$ (n pair ou impair)