DÉRIVATION NUMÉRIQUE

(Étude mathématique et programmes écrits en langage J)

Robert Coquidé – 03/10/18

TABLE DES MATIÈRES

I – INTRODUCTION
II – PRÉSENTATION MATHÉMATIQUE
A) GÉNÉRALITÉS
B) ÉTUDE DE L'ERREUR SYSTÉMATIQUE
C) ÉTUDE DE L'ERREUR D'ARRONDI
D) ÉTUDE DE L'ERREUR TOTALE
E) REMARQUES SUR CES ÉTUDES
F) RECHERCHE D'UN PAS OPTIMAL
III – ASPECT INFORMATIQUE
A) REMARQUES CONCERNANT LE LANGAGE J
B) PRO-VERBE CRÉANT DES PRO-ADVERBES
C) MOULT PRO-ADVERBES CALCULANT DES DÉRIVÉES
IV – UTILISATION
EX1 : CALCUL D'UNE DÉRIVÉE SECONDE
EX2 : CALCUL D'UNE DÉRIVÉE PREMIÈRE
EX3 : CALCUL DE LA CONSTANTE D'EULER γ
V - ANNEXES
ANNEXE 1 : SIMPLIFICATIONS D'EXPRESSIONS
ANNEXE 2 : MAJORANT DE L'ERREUR SYSTÉMATIQUE
ANNEXE 3 : RECHERCHE D'UN h OPTIMAL ET DE L'ERREUR OPTIMALE
ANNEXE 4 : TROIS EXEMPLES COMPLETS
ANNEXE 5 : GÉNÉRATION AUTOMATIQUE DE PROGRAMMES J SOUS FORME DE PRO-ADVERBES

I) INTRODUCTION

Calculer une dérivée, c'est élémentaire ! Très tôt on apprend à l'école la formule :

$$\boxed{f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Cette formule satisfait totalement le « mathématicien pur », car elle est parfaitement rigoureuse *(pour une fonction continue et dérivable !)*. Elle a permis l'établissement de tables de dérivées pour un nombre très limité de fonctions.

Malheureusement, cette formule ne satisfait pas le « numéricien » car elle est inexploitable pour plusieurs raisons :

1) Il faut utiliser un « outil de calcul » : papier-crayon, règle à calcul, tables numériques (*trigonométriques, logarithmiques*,…), calculette, ordinateur. Tous fournissent un nombre fini de décimales,…et des résultats intermédiaires arrondis (*ou tronqués*) ! Donc, tous engendrent une erreur (E_a : Erreur d'arrondi ou de troncature).
2) Ces outils ne réalisent pas un « passage à la limite ». Ils ne peuvent pas œuvrer avec des infiniment petits. Ils ne peuvent utiliser que des valeurs de h « petites », « très petites », « encore plus petites »,… mais constantes ! Cela induit des erreurs systématiques (E_s) s'ajoutant aux erreurs d'arrondi.
3) Si h est petit, f(x+h)-f(x) sera voisin de zéro… et parfois… de l'ordre de grandeur de l'erreur d'arrondi ! La division par h est équivalente à une multiplication par un nombre très grand. D'où une erreur générée très grande…et l'obligation de ne pas prendre h trop petit !

Pour toutes ces raisons, il faudra utiliser une formule mathématique plus compliquée mais tout aussi rigoureuse, la formule de TAYLOR :

$$\boxed{f(x+kh) = \{f(x) + \sum_{n=1}^{p} f^{(n)}(x) \frac{k^n h^n}{n!}\} + f^{(p+1)}(x+tkh) \frac{k^{p+1} h^{p+1}}{(p+1)!}}$$

où $0 < t < 1$

h est un « petit » accroissement positif de la variable x

k est un facteur réel

(On suppose que f(x) et ses dérivées jusqu'à l'ordre p+1 sont continues dans un intervalle où évoluent les variables x et x+k.h)

II) PRÉSENTATION MATHÉMATIQUE

A) GÉNÉRALITÉS

Soit à calculer la dérivée à l'ordre I, avec une erreur en h^J, d'une fonction **f(x) supposée continûment dérivable jusqu'à un ordre suffisant**. On utilise la formule de TAYLOR où le pas h est un « petit » accroissement positif de la variable x, k un facteur positif, I et J des entiers > 0

$$\mathbf{T(k) = f(x+k.h) - f(x) = f^{(1)}(x)k^1.h^1/1! +\ldots+ f^{(I)}(x)k^I.h^I/I! +\ldots+ f^{(I+J)}(x+t.k.h)k^{I+J}.h^{I+J}/(I+J)!}$$

(*t est inconnu et vérifie $0 < t < 1$*)

Pour calculer $f^{(I)}(x)$ avec une erreur systématique en h^J , 3 cas sont possibles :

1) <u>Si J pair et I pair</u> , on pose (*les dérivées d'ordres impaires disparaissent*) :

$$\mathbf{P(k) = T(k)+T(-k) =f(x+k.h)+f(x-k.h)-2.f(x)}$$

$$\mathbf{= 2.\{f^{(2)}(x)k^2.h^2/2!+\ldots+f^{(I)}(x)k^I.h^I/I!+\ldots+f^{(I+J)}(x+t.k.h)k^{I+J}.h^{I+J}/(I+J)!\}}$$

On utilise une combinaison linéaire incluant **N = ((I+J)/2)-2** constantes inconnues (**CL={c_1.P(k_1)+c_2.P(k_2)+…+c_N.P(k_N)}**) annulant les facteurs de $f^{(2)}(x)h^2$ à $f^{(I+J-2)}(x)h^{I+J-2}$ sauf celui de $f^{(I)}(x)h^I$ qui doit être fixé à 1. On obtient :

$$\boxed{CL = c_0 f(x) + \sum_{n=1}^{N} c_n [f(x+k_n h) + f(x-k_n h)] = f^{(I)}(x)h^I + \frac{h^{I+J}}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^{I+J} [f^{(I+J)}(x+t'_n k_n h) + f^{(I+J)}(x-t''_n k_n h)]}$$

où $c_0 = -2\sum_{n=1}^{N} c_n$, $k_n = n/N$, $0 < t'_n < 1$, $0 < t''_n < 1$

2) <u>Si J pair et I impair</u> , on pose (*f(x) et les dérivées d'ordres paires disparaissent*) :

$$\mathbf{I(k) = T(k)-T(-k) = f(x+k.h)-f(x-k.h)}$$

$$\mathbf{= 2.\{f^{(1)}(x)k^1.h^1/1!+\ldots+f^{(I)}(x)k^I.h^I/I!+\ldots +f^{(I+J)}(x+t.k.h)k^{I+J}.h^{I+J}/(I+J)!\}}$$

On utilise une combinaison linéaire incluant **N = ((I+J+1)/2)-2** constantes inconnues (**CL = {c_1.I(k_1)+c_2.I(k_2)+…+c_N.I(k_N)}**) annulant les facteurs de $f^{(1)}(x)h^1$ à $f^{(I+J-2)}(x)h^{I+J-2}$ sauf celui de $f^{(I)}(x)h^I$ qui doit être fixé à 1. On obtient :

$$\boxed{CL = \sum_{n=1}^{N} c_n [f(x+k_n h) - f(x-k_n h)] = f^{(I)}(x)h^I + \frac{h^{I+J}}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^{I+J} [f^{(I+J)}(x+t'_n k_n h) - f^{(I+J)}(x-t''_n k_n h)]}$$

où $k_n = n/N$, $0 < t'_n < 1$, $0 < t''_n < 1$

3) <u>Si J est impair</u> (et I pair ou impair) on pose :

$$\mathbf{T(k) = f(x+k.h) - f(x) = f^{(1)}(x)k^1.h^1/1! +\ldots+ f^{(I)}(x)k^I.h^I/I! +\ldots+ f^{(I+J)}(x+t.k.h)k^{I+J}.h^{I+J}/(I+J)!}$$

On utilise une combinaison linéaire incluant **N = I+J-2** constantes inconnues (**CL ={c_1.T(k_1)+c_2.T(k_2)+…+c_N.T(k_N)}**) annulant les facteurs de $f^{(1)}(x)h^1$ à $f^{(I+J-1)}(x)h^{I+J-1}$ sauf celui de $f^{(I)}(x)h^I$ qui doit être fixé à 1.

On obtient :

$$\boxed{CL = c_0 f(x) + \sum_{n=1}^{N} c_n f(x + k_n h) = f^{(I)}(x)h^I + \frac{h^{I+J}}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^{I+J} f^{(I+J)}(x + t_n k_n h)}$$

où $c_0 = -\sum_{n=1}^{N} c_n$, $k_n = n/N$, $0 < t_n < 1$

Dans les 3 cas : $k_n = n/N$ et $1 \le n \le N$ $\boxed{\mathbf{f^{(I)}(x) = CL/h^I + E_s(h)}}$
erreur systématique : $\mathbf{E_s(h)}$

La résolution d'un système de CRAMER d'ordre N avec matrice de VANDERMONDE permet le calcul des N constantes c_n.

B) ÉTUDE DE L'ERREUR SYSTÉMATIQUE

En pratique, on utilise la formule approchée :

$\boxed{\mathbf{f^{(I)}(x) = CL/h^I}}$ et $k_n = n/N$ avec une erreur systématique $E_s(h)$

1) <u>Si J pair et I pair</u> $$E_s(h) = \frac{-h^J}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^{I+J}[f^{(I+J)}(x + t'_n k_n h) + f^{(I+J)}(x - t''_n k_n h)]$$

2) <u>Si J pair et I impair</u> $$E_s(h) = \frac{-h^J}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^{I+J}[f^{(I+J)}(x + t'_n k_n.h) - f^{(I+J)}(x - t''_n k_n h)]$$

3) <u>Si J est impair</u> (I pair ou impair) $$E_s(h) = \frac{-h^J}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} c_n k_n^{I+J} f^{(I+J)}(x + t_n k_n h)$$

Ces expressions étant compliquées et les valeurs de t_n, t'_n t''_n étant inconnues, on se contente de calculer un majorant de la valeur absolue.

On montre (voir annexe 2) que dans les 3 cas : $\boxed{\mathbf{| E_s(h) | < r_1 . M . h^J}}$

avec M= Sup $|f^{(I+J)}(z)|$ où z ϵ]-h,h[si J pair et z ϵ]0, h[si J impair

$r_1 = \frac{2}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} | c_n | .k_n^{I+J}$ si J est pair , $r_1 = \frac{1}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} | c_n | .k_n^{I+J}$ si J est impair

C) ETUDE DE l'ERREUR d'ARRONDI

De la formule **$f^{(I)}(x) = CL/h^I$** avec

$$CL = c_0 f(x) + \sum_{n=1}^{N} c_n [f(x+k_n h) + f(x-k_n h)]$$ si I et J sont pairs

$$CL = \sum_{n=1}^{N} c_n [f(x+k_n h) - f(x-k_n h)]$$ si I est impair et J pair

$$CL = c_0 f(x) + \sum_{n=1}^{N} c_n f(x+k_n h)$$ si J est impair

On déduit :

$\boxed{\mathbf{| E_a(h) | < r_2 \,.\, \varepsilon / h^I}}$ avec

ε = erreur maxi sur chaque terme flottant calculé par l'outil de calcul

(on prend ici $\varepsilon = 10^{-15}$)

$r_2 = |c_0| + 2\sum_{n=1}^{N} |c_n|$ si I et J sont pairs

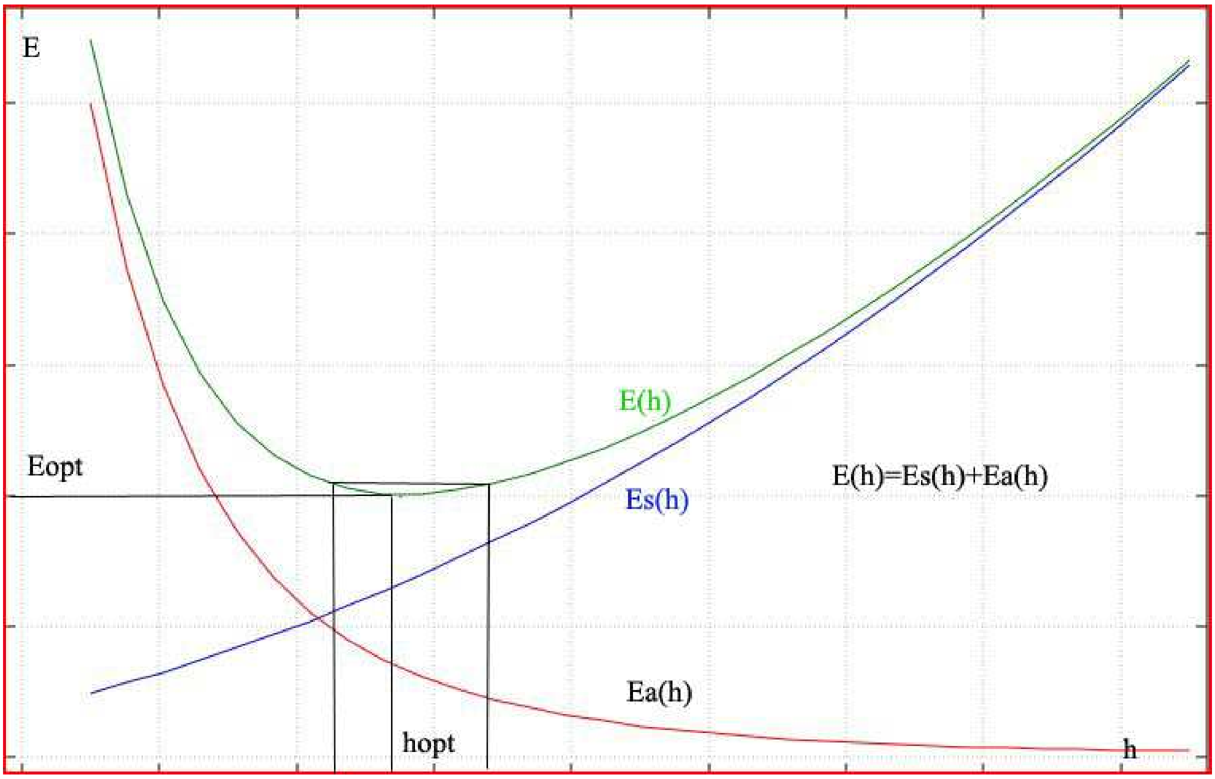
$r_2 = 2\sum_{n=1}^{N} |c_n|$ si I impair et J pair

$r_2 = |c_0| + \sum_{n=1}^{N} |c_n|$ si J est impair

D) ERREUR TOTALE SUR LE CALCUL D'UNE DÉRIVÉE D'ORDRE I

d'une fonction f(x) avec une erreur systématique en h^J (h est le pas utilisé). I et J sont des entiers > 0. L'erreur totale est la somme des erreurs d'arrondi et systématique. Nous raisonnons sur la somme des valeurs absolues maximales :

$$\boxed{E(h) = r_1.M.h^J + r_2.\varepsilon.h^{-I}}$$



On a : $\lim_{h\to 0} |E_s(h)| = 0$; $\lim_{h\to 0} |E_a(h)| = +\infty$; $\lim_{h\to\infty} |E_s(h)| = \infty$; $\lim_{h\to\infty} |E_a(h)| = 0$

Il en résulte : $$\lim_{h\to 0} E(h) = \lim_{h\to\infty} E(h) = \infty$$

E(h) passe par un minimum (E_{opt}) pour un h optimal (h_{opt}).

E) REMARQUES CONCERNANT L'ÉTUDE PRÉCÉDENTE

1) L'expression h → 0 a un sens précis en mathématiques pures. Elle n'a aucun sens en informatique. On ne peut que prendre un pas h « petit », « très petit », « encore plus petit » … mais fixe. On ne peut donc calculer une dérivée (*pente d'une tangente*) qu'avec un algorithme approximatif (*pente d'une corde*).
2) Si le pas diminue, l'erreur systématique diminue mais l'erreur d'arrondi augmente. Il faut donc prendre un compromis : le h optimal.
3) Un algorithme étant choisi, un ordinateur étant utilisé, un h optimal et une erreur optimale en résulteront. Il sera impossible en choisissant h d'obtenir une erreur inférieure à cette erreur optimale. Si l'ordinateur calculait tout avec une infinité de « chiffres significatifs », le h optimal serait nul.

4) Pour un algorithme donné, l'augmentation de la précision de l'ordinateur a pour effet de faire diminuer le h optimal.
5) L'idéal serait de pouvoir calculer le h optimal pour toute dérivée de tous ordres, et cela pour toute fonction. En pratique, on ne sait que calculer des majorants des valeurs absolues des erreurs. On ne peut par ce procédé qu'obtenir des ordres de grandeurs du h optimal et de l'erreur optimale.
6) Heureusement, la courbe E(h) passant par un minimum, un ordre de grandeur du h optimal est souvent suffisant car choisir h dans un « petit » intervalle contenant le h optimal n'engendrera qu'une variation de l'erreur résultante souvent négligeable comparée à l'erreur optimale.
7) Calculer $f^{(I)}(x)$ avec une erreur systématique en h^J suppose que les dérivées de f(x) sont continues dans [x,x+h] ou [x-h,x+h], selon l'algorithme utilisé, jusqu'à l'ordre I+J.
8) Devant la difficulté de calculer le h optimal, il est possible de choisir une autre approche. Pour une fonction « régulière » simple et connue ainsi que ses dérivées (ex : e^x au voisinage de x=0), on peut tester expérimentalement tout algorithme, obtenir ainsi le h optimal et l'erreur optimale. On prendra évidemment un risque en adoptant les mêmes valeurs pour une autre fonction « régulière ».
9) Si plusieurs algorithmes programmés fournissent m décimales communes pour un même calcul de dérivée, on peut « postuler statistiquement » que ces décimales appartiennent au résultat exact cherché. Évidemment, cet argument n'a aucune justification mathématique. Il n'a qu'une plausibilité statistique. Mais on s'en contente souvent en informatique (*Ex : on affirme connaître la 6 000 000 000^e décimale de pi parce que plusieurs algorithmes différents donnent le même résultat pour cette décimale ! On estime alors qu'il très peu probable que ces algorithmes aient commis une même erreur au même endroit !*).
10) Si on peut, comme en langage J, pousser les calculs aussi loin que possible en entiers étendus ou en nombres rationnels sous forme de fractions, les amplifications par propagation d'erreurs seront très limitées.

F) RECHERCHE D'UN h OPTIMAL ET DE L'ERREUR TOTALE OPTIMALE

Il est illusoire et dangereux de choisir h trop petit. Il faut choisir h au voisinage de l'optimum h_{opt} donnant une erreur minimale.

On trouve (*voir annexe 3*) : $E(h) = r_1.M.\,h^J + r_2.\varepsilon/h^I$ (r_1 et r_2 sont des constantes)

$\boxed{h_{opt} = a_1/M^{1/(I+J)}}$ avec $a_1 = ((r_2.I.\varepsilon)/(r1.J))^{1/(I+J)}$

$\boxed{E_{opt} = a_2.M^{I/(I+J)}}$ avec $a_2 = ((I/J)^{J/(I+J)} + (J/I)^{I/(I+J)}).(r_1^I.r_2^J.\,\varepsilon^J)^{1/(I+J)}$

Il est difficile en pratique de calculer le h optimal pour une fonction f(x) donnée, car on ne peut généralement estimer que grossièrement et difficilement M.

E_{opt} est le plus souvent très surestimé et pratiquement $\boxed{E(h) < E_{opt}}$

III) ASPECT INFORMATIQUE

A) REMARQUES CONCERNANT LE LANGAGE J

1) Avec le langage J , il est possible de calculer les valeurs rationnelles sans erreur : on utilise pour cela les « entiers étendus » et les fractions.
Ex : 13546987332016677745388x et 2r3 pour 2 tiers.

2) Les valeurs « flottantes » sont évidemment tronquées, comme dans tout langage informatique.
Ex : 3.1415926535897931 pour ¶ (qui comporte une infinité de décimales).

3) Il est donc judicieux de calculer les rationnels en fractions et entiers étendus, puis de les incorporer dans les expressions flottantes le plus tard possible.

4) Il est possible de générer des programmes (Pro-verbes, Pro-adverbes, Pro-conjonctions) au moyen d'un programme générateur : il suffit que ce dernier restitue une chaîne de caractères pouvant ensuite se transformer en programme. C'est ce qui est fait dans la suite de ce texte.
Ex : **Ch =. Autoprog I,J** NB. création d'une chaîne
puis **DIfJ =: 1 : Ch** NB. chaîne transformée en Pro-adverbe.
La chaîne doit comporter le caractère **RC =. 10 { a.** (passage à la ligne).
Nous l'utiliserons ensuite de la façon suivante :

R =. h (**f DIfJ) 5.2**

R = dérivée d'ordre I de la fonction f avec erreur systématique en h^J au point d'abscisse X=5.2, ou

R =. f DIfJ 5.2 si un h par défaut est introduit dans la version monadique.

B) PRO-VERBE CRÉANT DES PRO-ADVERBES

Espace de travail **DERIVAUTO.IJS**

```
      NB. Derivauto.ijs
NB.     R. Coquidé        (juin 2012)
NB. Création automatique d'un pro-Adverbe de dérivation
NB. à un ordre I, avec une erreur systématique en h^J
NB.          Utilisation :
NB. pour dériver une fonction (pro-verbe)   FONCT
NB. à l'ordre I  au point d'abscisse X
NB. avec une erreur systématique d'ordre J      ( cste*h^J)
NB. écrire  (I et J sont 2 entiers > 0) :
NB.
NB.   DIfJ =: 1   :   ch =. Autoprog    I,J
NB.                puis :
NB.   h   (FONCT   DIfJ)   X
NB.
NB. Il y a possibilité d'ajouter un pas par défaut
NB. (valeur optimale trouvée empiriquement)
NB. utilisable monadiquement sous forme :
NB.
NB.     (FONCT    DIfJ)    X
```

NB. Outils utilisés par Autoprog :

```
      Pairs =: (0: = 2: | ])#]          NB. Sélection des nombres pairs

    Impairs =: (0: ~:2: | ])#]          NB. Sélection des nombres impairs

       Tous =: ] : [:                   NB. Sélection de tous les nombres

     Parite =: 2:<.(2:|])p.2:           NB. Parite I,J  -> 0(Pairs) 1(Impairs) 2(Tous)

   Autoprog =: 3 : 0                    NB. DIfJ =: ch =. Autoprog I,J

U =. (Pairs`Impairs`Tous @.(p=.0x+Parite y))1x+i.I+J-1x [ 'I J'=.y+0x

C0=._2x*+/C1 =. (1r2*!I)*(0x+U=I)%.(|:(V=.(1x+i.N)%N=.0x+#U)^/U)

select.  p

  case.  0  do. C =. C0,Ce=.,C1,.C1 [ K=.0x,W=.,V,.-V     NB. Pairs

  case.  1  do. C =. Ce=.,C1,.-C1      [ K=.W=.,V,.-V        NB. Impairs

  case.  2  do. C =. C0,Ce=.2x*C1   [ K=.0x,W=.V           NB. Tous

   end.

r1 =.(+/|Ce*W^I+J)%!I+J

a1 =. ((I*r2*er)%J*r1)^%I+J [ r2 =. +/|C [ r1=.(+/|Ce*W^I+J)%!I+J [ er=.1e_15

a2 =. (((J%I)^I%I+J)+((I%J)^J%I+J))*((r1^I)*(r2^J)*(er^J))^%I+J

CH =. 'NB. Es en h^',(":J),RC=.10{a.

CH =. CH,'[:  NB. hopt (u Adv) y   NB. Er=     pour u=exp(X), X=0 et h=',RC,':',RC

CH =. CH,'NB. hopt = ',(":a1),' % M ^ ',(":1x%I+J),RC

CH =. CH,'NB. Eopt = ',(":a2),' * M ^ ',(":I%I+J+0x),RC

CH =. CH,'(+/',(":C),'*u y+x*',(":K),')%x^',(":I),RC

CH

)
```

NB. Possibilité de créer plusieurs pro-adverbes en même temps avec le pro-verbe

NB. **Multiautoprog :**

Multiautoprog =: 3 : 0 NB. Ex: **Multiautoprog 1 2 3; 2 3 4 5**

```
'Iv Jv' =. y

m1 =. >;:, names 1

for_I.  Iv do.    for_J.  Jv do.    Ch =.  Autoprog I,J

".   'D',(":I),'f',(":J),' =: 1  :  Ch'          end. end.

m2 =. >;:, names 1

,'  ',.~(-. m2 e. m1)#m2                    NB. Retourne la liste des créations

)
```

L'espace de travail DERIVEES.IJS a été créé entièrement avec les outils Autoprog et Multiautoprog situés dans l'espace de travail DERIVAUTO.IJS.

(Voir annexes 4 et 5)

C) MOULT PRO-ADVERBES CALCULANT DES DÉRIVÉES

Tous créés automatiquement au moyen de l'espace de travail **DERIVAUTO.IJS**

Espace de travail DERIVEES.IJS

NB. **Dérivées numériques (R. Coquidé juin 2012)**
NB. **Pro-Adverbes : Difj**
NB. signifie : Dérivée d'ordre i d'une fonction avec une
NB. erreur systématique en h^j
NB. Utilisation :
NB. **1) dyadique**
NB. **h (Ft Difj) X**
NB. Difj : Adverbe utilisé
NB. Ft : Ft à dériver (verbe ou proverbe monadique)
NB. X : abscisse
NB. h : pas
NB. **2) monadique**
NB. **(Ft Difj) X**
NB. le pas par défaut est celui qui est optimal pour
NB. la ft exponentielle avec X=0 (obtenu expérimentalement)

Remarque : ce pas par défaut (pour l'utilisation monadique) est optimal pour exp(x) au point x=0.
Toutes les dérivées de tous ordres de cette fonction sont égales à 1. Un « bricolage » expérimental permet de trouver une valeur de h (h_{opt}) donnant une valeur très voisine de 1 pour ces dérivées. Ce h_{opt} est alors « assez bon » pour des fonctions aussi régulières que exp(x) mais « douteux » pour des fonctions présentant des « variations trop brutales ».

NB. **1) DÉRIVÉE D'ORDRE 1**

```
        D1f1 =: 1 : 0            NB. Es en h^1
0.000000008 (u D1f1) y          NB. Er=5.26e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.000000008
:
                                 NB. hopt = 6.32456e_8 % M ^ 1r2
                                 NB. Eopt = 6.32456e_8 * M ^ 1r2
(+/_1 1*u y+x*0 1)%x^1
)
        D1f2 =: 1 : 0            NB. Es en h^2
0.0000019 (u D1f2) y            NB. Er=4.6e_13 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0000019
:
                                 NB. hopt = 1.44225e_5 % M ^ 1r3
                                 NB. Eopt = 1.04004e_10 * M ^ 1r3
(+/1r2 _1r2*u y+x*1 _1x)%x^1
)
        D1f3 =: 1 : 0            NB. Es en h^4
0.0001475 (u D1f3) y            NB. Er=_4.29e_12 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0001475
:
                                 NB. hopt = 0.00053183 % M ^ 1r4
                                 NB. Eopt = 5.01414e_11 * M ^ 1r4
(+/_11r2 9 _9r2 1*u y+x*0 1r3 2r3 1)%x^1
)
        D1f4 =: 1 : 0            NB. Es en h^4
0.00000095 (u D1f4) y           NB. Er=4.6e_13 pour u=exp(X), X=0 et h=0.00000095
:
                                 NB. hopt = 0.00293016 % M ^ 1r5
                                 NB. Eopt = 1.2798e_12 * M ^ 1r5
(+/4r3 _4r3 _1r6 1r6*u y+x*1r2 _1r2 1 _1)%x^1
)
        D1f5 =: 1 : 0            NB. Es en h^5
0.0055 (u D1f5) y               NB. Er=7e_14 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0055
:
                                 NB. hopt = 0.0123166 % M ^ 1r6
                                 NB. Eopt = 8.314e_12 * M ^ 1r6
(+/_137r12 25 _25 50r3 _25r4 1*u y+x*0 1r5 2r5 3r5 4r5 1)%x^1
)
        D1f6 =: 1 : 0            NB. Es en h^6
0.0128 (u D1f6) y               NB. Er=6.1e_15 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0128
:
                                 NB. hopt = 0.0313644 % M ^ 1r7
                                 NB. Eopt = 2.04584e_13 * M ^ 1r7
(+/9r4 _9r4 _9r20 9r20 1r20 _1r20*u y+x*1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^1
)
        D1f7 =: 1 : 0            NB. Es en h^7
0.06 (u D1f7) y                 NB. Er=_1.56e_13 pour u=exp(X), X=0 et h=0.06
:
                                 NB. hopt = 0.0645392 % M ^ 1r8
                                 NB. Eopt = 5.70432e_12 * M ^ 1r8
(+/_363r20 49 _147r2 245r3 _245r4 147r5 _49r6 1*u y+x*0 1r7 2r7 3r7 4r7 5r7 6r7 1)%x^1
)
```

```
        D1f8 =: 1 : 0           NB. Es en h^8
0.1 (u D1f8) y                  NB. Er=_6.75e_14 pour u=exp(X), X=0 et h=0.1
:
                                NB. hopt = 0.123983 % M ^ 1r9
                                NB. Eopt = 7.5615e_14 * M ^ 1r9
(+/16r5 _16r5 _4r5 4r5 16r105 _16r105 _1r70 1r70*u y+x*1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1 _1)%x^1
)
        D1f9 =: 1 : 0           NB. Es en h^9
0.39 (u D1f9) y                 NB. Er=_8.35e_14 pour u=exp(X), X=0 et h=0.39
:
                                NB. hopt = 0.184386 % M ^ 1r10
                                NB. Eopt = 7.3166e_12 * M ^ 1r10
(+/_7129r280 81 _162 252 _567r2 1134r5 _126 324r7 _81r8 1*u y+x*0 1r9 2r9 1r3 4r9 5r9 2r3 7r9 8r9
1)%x^1
)
        D1f10 =: 1 : 0          NB. Es en h^10
0.337 (u D1f10) y               NB. Er=7.77e_16 pour u=exp(X), X=0 et h=0.337
:
                                NB. hopt = 0.308799 % M ^ 1r11
                                NB. Eopt = 4.06683e_14 * M ^ 1r11
(+/25r6 _25r6 _25r21 25r21 25r84 _25r84 _25r504 25r504 1r252 _1r252*u y+x*1r5 _1r5 2r5 _2r5 3r5
_3r5 4r5 _4r5 1 _1)%x^1
)

NB. 2) DÉRIVÉE D'ORDRE 2

        D2f1 =: 1 : 0           NB. Es en h^1
0.00001 (u D2f1) y              NB. Er=_8.27e_8  pour u=exp(X), X=0 et h=0.00001
:
                                NB. hopt = 3.37373e_5 % M ^ 1r3
                                NB. Eopt = 4.21716e_5 * M ^ 2r3
(+/4 _8 4x*u y+x*0 1r2 1)%x^2
)
        D2f2 =: 1 : 0           NB. Es en h^2
0.000145 (u D2f2) y             NB. Er=1.75e_9 pour u=exp(X), X=0 et h=0.000145
:
                                NB. hopt = 0.000468069 % M ^ 1r4
                                NB. Eopt = 3.65148e_8 * M ^ 1r2
(+/_2 1 1x*u y+x*0 1 _1x)%x^2
)
        D2f3 =: 1 : 0           NB. Es en h^3
0.004 (u D2f3) y                NB. Er=3.04e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.004
:
                                NB. hopt = 0.00391167 % M ^ 1r5
                                NB. Eopt = 4.64744e_8 * M ^ 2r5
(+/140r3 _416r3 152 _224r3 44r3*u y+x*0 1r4 1r2 3r4 1)%x^2
)
        D2f4 =: 1 : 0           NB. Es en h^4
0.00775 (u D2f4) y              NB. Er=_1.87e_11 pour u=exp(X), X=0 et h=0.00775
:
                                NB. hopt = 0.0144796 % M ^ 1r6
                                NB. Eopt = 1.52629e_10 * M ^ 1r3
(+/_10 16r3 16r3 _1r3 _1r3*u y+x*0 1r2 _1r2 1 _1)%x^2
)
```

```
    D2f5 =: 1 : 0          NB. Es en h^5
0.055 (u D2f5) y           NB. Er=_7.78e_11 pour u=exp(X), X=0 et h=0.055
:
                           B. hopt = 0.0345965 % M ^ 1r7
                           NB. Eopt = 4.29689e_9 * M ^ 2r7
(+/812r5 _3132r5 1053 _1016 594 _972r5 137r5*u y+x*0 1r6 1r3 1r2 2r3 5r6 1)%x^2
)
    D2f6 =: 1 : 0          NB. Es en h^6
0.06 (u D2f6) y            NB. Er=3.57e_13 pour u=exp(X), X=0 et h=0.06
:
                           NB. hopt = 0.0834975 % M ^ 1r8
                           NB. Eopt = 1.04038e_11 * M ^ 1r4
(+/_49r2 27r2 27r2 _27r20 _27r20 1r10 1r10*u y+x*0 1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^2
)
    D2f7 =: 1 : 0          NB. Es en h^7
0.05 (u D2f7) y            NB. Er=1.83e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.05
:
                           NB. hopt = 0.124368 % M ^ 1r9
                           NB. Eopt = 1.90235e_9 * M ^ 2r9
(+/118124r315  _61568r35  19872r5 _256384r45  5528  _18048r5  68576r45 _13184r35  1452r35* u y+x*0
1r8 1r4 3r8 1r2 5r8 3r4 7r8 1)%x^2
)
    D2f8 =: 1 : 0          NB. Es en h^8
0.18 (u D2f8) y            NB. Er=_8.17e_14 pour u=exp(X), X=0 et h=0.18
:
                           NB. hopt = 0.247548 % M ^ 1r10
                           NB. Eopt = 2.12193e_12 * M ^ 1r5
(+/_410r9 128r5 128r5 _16r5 _16r5 128r315 128r315 _1r35 _1r35*u y+x*0 1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1
_1)%x^2
)
    D2f9 =: 1 : 0          NB. Es en h^9
0.4 (u D2f9) y             NB. Er=_1.9e_11 pour u=exp(X), X=0 et h=0.4
:
                           NB. hopt = 0.293376 % M ^ 1r11
                           NB. Eopt = 1.76964e_9 * M ^ 2r11
(+/177133r252 _243050r63 153025r14 _1308200r63 168775r6 _27508 174025r9 _200600r21 88325r28
_13150r21 7129r126*u y+x*0 1r10 1r5 3r10 2r5 1r2 3r5 7r10 4r5 9r10 1)%x^2
)
    D2f10 =: 1 : 0         NB. Es en h^10
0.5 (u D2f10) y            NB. Er=5.7e_14 pour u=exp(X), X=0 et h=0.5
:
                           NB. hopt = 0.524831 % M ^ 1r12
                           NB. Eopt = 7.43518e_13 * M ^ 1r6
(+/_5269r72 125r3 125r3 _125r21 _125r21 125r126 125r126 _125r1008 _125r1008 1r126 1r126*u y+x*0
1r5 _1r5 2r5 _2r5 3r5 _3r5 4r5 _4r5 1 _1)%x^2
)
```

NB. **3) DÉRIVÉE D'ORDRE 3**

```
        D3f1 =: 1 : 0           NB. Es en h^1
0.000375 (u D3f1) y             NB. Er=_4e_5 pour u=exp(X), X=0 et h=0.000375
:
                                NB. hopt = 0.000771052 % M ^ 1r4
                                NB. Eopt = 0.00188479 * M ^ 3r4
(+/_27 81 _81 27x*u y+x*0 1r3 2r3 1)%x^3
)
        D3f2 =: 1 : 0           NB. Es en h^2
0.0009 (u D3f2) y               NB. Er=_1.18e_6 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0009
:
                                NB. hopt = 0.00347707 % M ^ 1r5
                                NB. Eopt = 1.42729e_6 * M ^ 3r5
(+/_8 8 4 _4x*u y+x*1r2 _1r2 1 _1)%x^3
)
        D3f3 =: 1 : 0           NB. Es en h^3
0.009 (u D3f3) y                NB. Er=_3.41e_7 pour u=exp(X), X=0 et h=0.009
:
                                NB. hopt = 0.0149382 % M ^ 1r6
                                NB. Eopt = 6.59978e_6 * M ^ 1r2
(+/_2125r4 8875r4 _7375r2 6125r2 _5125r4 875r4*u y+x*0 1r5 2r5 3r5 4r5 1)%x^3
)
        D3f4 =: 1 : 0           NB. Es en h^4
0.01442 (u D3f4) y              NB. Er=8e_11 pour u=exp(X), X=0 et h=0.01442
:
                                NB. hopt = 0.0343487 % M ^ 1r7
                                NB. Eopt = 6.41262e_9 * M ^ 3r7
(+/_351r8 351r8 27 _27 _27r8 27r8*u y+x*1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^3
)
        D3f5 =: 1 : 0           NB. Es en h^5
0.0935 (u D3f5) y               NB. Er=9.86e_9 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0935
:
                                NB. hopt = 0.0746613 % M ^ 1r8
                                NB. Eopt = 6.00599e_7 * M ^ 3r8
(+/_331681r120 218834r15 _1347647r40 133427r3 _872935r24 91924r5 _634207r120 9947r15*u y+x*0
1r7 2r7 3r7 4r7 5r7 6r7 1)%x^3
)
        D3f6 =: 1 : 0           NB. Es en h^6
0.12 (u D3f6) y                 NB. Er=_8.2e_12 pour u=exp(X), X=0 et h=0.12
:
                                NB. hopt = 0.132474 % M ^ 1r9
                                NB. Eopt = 3.11422e_10 * M ^ 1r3
(+/_1952r15 1952r15 1352r15 _1352r15 _96r5 96r5 28r15 _28r15*u y+x*1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1
_1)%x^3
)
        D3f7 =: 1 : 0           NB. Es en h^7
0.3 (u D3f7) y                  NB. Er=_6.75e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.3
:
                                NB. hopt = 0.207608 % M ^ 1r10
                                NB. Eopt = 2.27617e_7 * M ^ 3r10
(+/_122121r14 30921993r560 _45570519r280 5878089r20 _14257053r40 2386017r8 _6828867r40
8968887r140 _3986901r280 797337r560*u y+x*0 1r9 2r9 1r3 4r9 5r9 2r3 7r9 8r9 1)%x^3
)
```

D3f8 =: 1 : 0 NB. Es en h^8
0.33 (u D3f8) y NB. Er=1.86e_12 pour u=exp(X), X=0 et h=0.33
:
NB. hopt = 0.325804 % M ^ 1r11
NB. Eopt = 4.59713e_11 * M ^ 3r11
(+/_41725r144 41725r144 109225r504 _109225r504 _13525r224 13525r224 31525r3024 _31525r3024 _5125r6048 5125r6048*u y+x*1r5 _1r5 2r5 _2r5 3r5 _3r5 4r5 _4r5 1 _1)%x^3
)
D3f9 =: 1 : 0 NB. Es en h^9
0.45 (u D3f9) y NB. Er=_1.09e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.45
:
NB. hopt = 0.425828 % M ^ 1r12
NB. Eopt = 1.80817e_7 * M ^ 1r4
(+/_454865257r21600 433135351r2800 _1860169663r3360 912463057r720 _1139454459r560 474745073r200 _7316958209r3600 50747037r40 _630716977r1120 2551397893r15120 _24518351r800 21433093r8400*u y+x*0 1r11 2r11 3r11 4r11 5r11 6r11 7r11 8r11 9r11 10r11 1)%x^3
)
D3f10 =: 1 : 0 NB. Es en h^10
0.62 (u D3f10) y NB. Er=3.76e_13 pour u=exp(X), X=0 et h=0.62
:
NB. hopt = 0.624371 % M ^ 1r13
NB. Eopt = 1.23596e_11 * M ^ 3r13
(+/_95526r175 95526r175 120663r280 _120663r280 _4969r35 4969r35 5787r175 _5787r175 _171r35 171r35 479r1400 _479r1400*u y+x*1r6 _1r6 1r3 _1r3 1r2 _1r2 2r3 _2r3 5r6 _5r6 1 _1)%x^3
)

NB. **4) DÉRIVÉE D'ORDRE 4**

D4f1 =: 1 : 0 NB. Es en h^1
0.0032 (u D4f1) y NB. Er= _0.000719 pour exp(X), X=0 et h=0.0032
:
NB. hopt = 0.00514001 % M ^ 1r5
NB. Eopt = 0.0293409 * M ^ 4r5
(+/256 _1024 1536 _1024 256x*u y+x*0 1r4 1r2 3r4 1)%x^4
)
D4f2 =: 1 : 0 NB. Es en h^2
0.0083 (u D4f2) y NB. Er=7.33e_7 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0083
:
NB. hopt = 0.0148772 % M ^ 1r6
NB. Eopt = 1.56776e_5 * M ^ 2r3
(+/96 _64 _64 16 16x*u y+x*0 1r2 _1r2 1 _1)%x^4
)
D4f3 =: 1 : 0 NB. Es en h^3
0.049 (u D4f3) y NB. Er=2.73e_7 pour u=exp(X), X=0 et h=0.049
:
NB. hopt = 0.0393935 % M ^ 1r7
NB. Eopt = 0.000328156 * M ^ 4r7
(+/7560 _40176 88776 _104544 69336 _24624 3672x*u y+x*0 1r6 1r3 1r2 2r3 5r6 1)%x^4
)
D4f4 =: 1 : 0 NB. Es en h^4
0.0067 (u D4f4) y NB. Er=_5e_5 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0067
:
NB. hopt = 0.0827005 % M ^ 1r8
NB. Eopt = 9.23531e_8 * M ^ 1r2
(+/756 _1053r2 _1053r2 162 162 _27r2 _27r2*u y+x*0 1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^4

)
D4f5 =: 1 : 0 NB. Es en h^5
0.22 (u D4f5) y NB. Er=_9.68e_8 pour u=exp(X), X=0 et h=0.22
:
NB. hopt = 0.136419 % M ^ 1r9
NB. Eopt = 3.7058e_5 * M ^ 4r9
(+/273664r5 _5390336r15 15655936r15 _8781824r5 5628416r3 _19546112r15 2870272r5 _2195456r15 247552r15*u y+x*0 1r8 1r4 3r8 1r2 5r8 3r4 7r8 1)%x^4
)
D4f6 =: 1 : 0 NB. Es en h^6
0.222 (u D4f6) y NB. Er=3.28e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.222
:
NB. hopt = 0.244333 % M ^ 1r10
NB. Eopt = 4.08639e_9 * M ^ 2r5
(+/2912 _31232r15 _31232r15 10816r15 10816r15 _512r5 _512r5 112r15 112r15*u y+x*0 1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1 _1)%x^4
)
D4f7 =: 1 : 0 NB. Es en h^7
0.614 (u D4f7) y NB. Er=_1.88e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.614
:
NB. hopt = 0.315787 % M ^ 1r11
NB. Eopt = 1.40961e_5 * M ^ 4r11
(+/42711625r189 _331970500r189 132383500r21 _867478000r63 182146750r9 _62549000r3 136715500r9 _485278000r63 54486625r21 _98870500r189 9046000r189*u y+x*0 1r10 1r5 3r10 2r5 1r2 3r5 7r10 4r5 9r10 1)%x^4
)
D4f8 =: 1 : 0 NB. Es en h^8
0.52 (u D4f8) y NB. Er=_8.33e_12 pour u=exp(X), X=0 et h=0.52
:
NB. hopt = 0.518407 % M ^ 1r12
NB. Eopt = 5.1515e_10 * M ^ 1r3
(+/191125r24 _208625r36 _208625r36 546125r252 546125r252 _67625r168 _67625r168 157625r3024 157625r3024 _5125r1512 _5125r1512*u y+x*0 1r5 _1r5 2r5 _2r5 3r5 _3r5 4r5 _4r5 1 _1)%x^4
)
D4f9 =: 1 : 0 NB. Es en h^9
0.8366 (u D4f9) y NB. Er=_1.2e_10 pour u=exp(X), X=0 et h=0.8366
:
NB. hopt = 0.582557 % M ^ 1r13
NB. Eopt = 1.06305e_5 * M ^ 4r13
(+/119492152r175 _1068865344r175 4559823792r175 _349554752r5 914888952r7 _4457123712r25 4524643104r25 _24007204224r175 2688435144r35 _216371776r7 211756176r25 _248001984r175 2733976r25*u y+x*0 1r12 1r6 1r4 1r3 5r12 1r2 7r12 2r3 3r4 5r6 11r12 1)%x^4
)
D4f10 =: 1 : 0 NB. Es en h^10
0.922 (u D4f10) y NB. Er=_1.56e_12 pour u=exp(X), X=0 et h=0.922
:
NB. hopt = 0.906261 % M ^ 1r14
NB. Eopt = 1.18384e_10 * M ^ 2r7
(+/444444r25 _2292624r175 _2292624r175 361989r70 361989r70 _39752r35 _39752r35 34722r175 34722r175 _4104r175 _4104r175 479r350 479r350*u y+x*0 1r6 _1r6 1r3 _1r3 1r2 _1r2 2r3 _2r3 5r6 _5r6 1 _1)%x^4
)

NB. **5) DÉRIVÉE D'ORDRE 5 ... ET PLUS**

D5f1 =: 1 : 0 NB. Es en h^1
0.0162 (u D5f1) y NB. Er=_9.8e_4 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0162
:
NB. hopt = 0.0185597 % M ^ 1r6
NB. Eopt = 0.272456 * M ^ 5r6
(+/_3125 15625 _31250 31250 _15625 3125x*u y+x*0 1r5 2r5 3r5 4r5 1)%x^5
)
D5f2 =: 1 : 0 NB. Es en h^2
0.0148 (u D5f2) y NB. Er=_8.26 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0148
:
NB. hopt = 0.0373768 % M ^ 1r7
NB. Eopt = 0.000116591 * M ^ 5r7
(+/1215r2 _1215r2 _486 486 243r2 _243r2*u y+x*1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^5
)
D5f3 =: 1 : 0 NB. Es en h^3
0.11485 (u D5f3) y NB. Er=_1.23e_6 pour u=exp(X), X=0 et h=0.11485
:
NB. hopt = 0.0824663 % M ^ 1r8
NB. Eopt = 0.00852344 * M ^ 5r8
(+/_386561r3 4958065r6 _2268945 20756645r6 _9495955r3 3479049r2 _1596665r3 420175r6*u y+x*0 1r7 2r7 3r7 4r7 5r7 6r7 1)%x^5
)
D5f4 =: 1 : 0 NB. Es en h^4
0.1 (u D5f4) y NB. Er=2.5e_8 pour u=exp(X), X=0 et h=0.1
:
NB. hopt = 0.137066 % M ^ 1r9
NB. Eopt = 1.03185e_6 * M ^ 5r9
(+/14848r3 _14848r3 _13312r3 13312r3 1536 _1536 _512r3 512r3*u y+x*1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1 _1)%x^5
)
D5f8 =: 1 : 0 NB. Es en h^8
0.5 (u D5f8) y NB. Er=0 pour u=exp(X), X=0 et h=0.5
:
NB. hopt = 0.63327 % M ^ 1r13
NB. Eopt = 5.41684e_9 * M ^ 5r13
(+/448848r7 _448848r7 _914031r14 914031r14 216792r7 _216792r7 _56250r7 56250r7 8712r7 _8712r7 _1251r14 1251r14*u y+x*1r6 _1r6 1r3 _1r3 1r2 _1r2 2r3 _2r3 5r6 _5r6 1 _1)%x^5
)
D6f1 =: 1 : 0 NB. Es en h^1
0.037 (u D6f1) y NB. Er=1.79e_3 pour u=exp(X), X=0 et h=0.037
:
NB. hopt = 0.0471867 % M ^ 1r7
NB. Eopt = 1.8935 * M ^ 6r7
(+/46656 _279936 699840 _933120 699840 _279936 46656x*u y+x*0 1r6 1r3 1r2 2r3 5r6 1)%x^6
)
D6f2 =: 1 : 0 NB. Es en h^2
0.061 (u D6f2) y NB. Er=_8.38e_5 pour u=exp(X), X=0 et h=0.061
:
NB. hopt = 0.0864877 % M ^ 1r8
NB. Eopt = 0.000445905 * M ^ 3r4
(+/_14580 10935 10935 _4374 _4374 729 729x*u y+x*0 1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^6
)

```
    D6f3 =: 1 : 0          NB. Es en h^3
0.22 (u D6f3) y            NB. Er=_2.7e_5 pour u=exp(X), X=0 et h=0.22
:
                           NB. hopt = 0.147961 % M ^ 1r9
                           NB. Eopt = 0.143908 * M ^ 2r3
(+/2555904 _19136512 62652416 _117178368 136970240 _102498304 47972352 _12845056 1507328x*u
y+x*0 1r8 1r4 3r8 1r2 5r8 3r4 7r8 1)%x^6
)
    D6f4 =: 1 : 0          NB. Es en h^4
0.1895 (u D6f4) y          NB. Er=3.6e_8 pour u=exp(X), X=0 et h=0.1895
:
                           NB. hopt = 0.245861 % M ^ 1r10
                           NB. Eopt = 5.9344e_6 * M ^ 3r5
(+/_153600 118784 118784 _53248 _53248 12288 12288 _1024 _1024x*u y+x*0 1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4
1 _1)%x^6
)
    D7f1 =: 1 : 0          NB. Es en h^1
0.0998 (u D7f1) y          NB. Er=1.13e_3 pour u=exp(X), X=0 et h=0.0998
:
                           NB. hopt = 0.0962591 % M ^ 1r8
                           NB. Eopt = 11.0127 * M ^ 7r8
(+/_823543 5764801 _17294403 28824005 _28824005 17294403 _5764801 823543x*u y+x*0 1r7 2r7 3r7
4r7 5r7 6r7 1)%x^7
)
    D7f2 =: 1 : 0          NB. Es en h^2
0.095 (u D7f2) y           NB. Er=_1.3e_5 pour u=exp(X), X=0 et h=0.095
:
                           NB. hopt = 0.145966 % M ^ 1r9
                           NB. Eopt = 0.00182788 * M ^ 7r9
(+/_114688 114688 114688 _114688 _49152 49152 8192 _8192x*u y+x*1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1
_1)%x^7
)
    D7f3 =: 1 : 0          NB. Es en h^3
0.3502 (u D7f3) y          NB. Er=_3.1e_4 pour u=exp(X), X=0 et h=0.3502
:
                           NB. hopt = 0.560156 % M ^ 1r10
                           NB. Eopt = 0.00452065 * M ^ 7r10
(+/_231176835r4 1975366197r4 _1874923848 4151617092 _11818716399r2 11216062305r2 _3548962998
1444456638 _1372712103r4 145083393r4*u y+x*0 1r9 2r9 1r3 4r9 5r9 2r3 7r9 8r9 1)%x^7
)
    D7f4 =: 1 : 0          NB. Es en h^4
0.2613 (u D7f4) y          NB. Er=_8.47e_8 pour u=exp(X), X=0 et h= 0.2613
:
                           NB. hopt = 0.340643 % M ^ 1r11
                           NB. Eopt = 3.53208e_5 * M ^ 7r11
(+/_4921875r4 4921875r4 1328125 _1328125 _5390625r8 5390625r8 1015625r6 _1015625r6 _390625r24
390625r24*u y+x*1r5 _1r5 2r5 _2r5 3r5 _3r5 4r5 _4r5 1 _1)%x^7
)
    D8f1 =: 1 : 0          NB. Es en h^1
0.1899 (u D8f1) y          NB. Er=1.32e_2 pour u=exp(X), X=0 et h=0.1899
:
                           NB. hopt = 0.169406 % M ^ 1r9
                           NB. Eopt = 56.9874 * M ^ 8r9
(+/16777216 _134217728 469762048 _939524096 1174405120 _939524096 469762048 _134217728
16777216x*u y+x*0 1r8 1r4 3r8 1r2 5r8 3r4 7r8 1)%x^8
```

)
D8f2 =: 1 : 0 NB. Es en h^2
0.147 (u D8f2) y NB. Er=5.1e_4 pour u=exp(X), X=0 et h=0.147
:
NB. hopt = 0.257003 % M ^ 1r10
NB. Eopt = 0.00440738 * M ^ 4r5
(+/4587520 _3670016 _3670016 1835008 1835008 _524288 _524288 65536 65536x*u y+x*0 1r4 _1r4 1r2 _1r2 3r4 _3r4 1 _1)%x^8
)
D8f3 =: 1 : 0 NB. Es en h^3
0.55 (u D8f3) y NB. Er=_1.9e_3 pour exp(X), X=0 et h=0.55
:
NB. hopt = 0.354196 % M ^ 1r11
NB. Eopt = 18.0624 * M ^ 8r11
(+/4400000000r3 _42200000000r3 60700000000 _155200000000 260400000000 _299600000000 239400000000 _131200000000 47200000000 _30200000000r3 2900000000r3*u y+x*0 1r10 1r5 3r10 2r5 1r2 3r5 7r10 4r5 9r10 1)%x^8
)
D8f4 =: 1 : 0 NB. Es en h^4
0.3801 (u D8f4) y NB. Er=7.6e_7 pour u=exp(X), X=0 et h=0.3801
:
NB. hopt = 0.523054 % M ^ 1r12
NB. Eopt = 0.000124946 * M ^ 2r3
(+/60156250 _49218750 _49218750 26562500 26562500 _8984375 _8984375 5078125r3 5078125r3 _390625r3 _390625r3*u y+x*0 1r5 _1r5 2r5 _2r5 3r5 _3r5 4r5 _4r5 1 _1)%x^8
)

IV) UTILISATION

Exemple 1 : $f(x)=\dfrac{(2+4x+\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+2x^4+\frac{1}{5}x^5)\sin(\frac{x}{3})}{3+(\frac{2}{3})^x}$

fonction qui, programmée en J sous forme implicite

f =: (2 4 5r3 _1r4 2 1r5&p.)*((1&o.)@(1r3&*))%(3+2r3&^) fournit :

Dérivée d'ordre 2 en x=1/2	**Dérivée d'ordre 2 en x=2**	**Dérivée d'ordre 2 en x= 5.2**
f D2f1 1r2	f D2f1 2	f D2f1 5.2
1.61277657895198	**37.23**52104704987	**251.2**43363891263
f D2f2 1r2	f D2f2 2	f D2f2 5.2
1.61275993220722	**37.234629**2786462	**251.23706**44779
f D2f3 1r2	f D2f3 2	f D2f3 5.2
1.61275993582066	**37.234629**1754866	**251.23706**2002474
f D2f4 1r2	f D2f4 2	f D2f4 5.2
1.6127599109318	**37.234629208**8621	**251.23706**537262
f D2f5 1r2	f D2f5 2	f D2f5 5.2
1.61275990955715	**37.234629**2100671	**251.237065**617903
f D2f6 1r2	f D2f6 2	f D2f6 5.2
1.61275991095931	**37.2346292094**268	**251.237065407**016
f D2f7 1r2	f D2f7 2	f D2f7 5.2
1.6127599109268	**37.234629**2198927	**251.23706**6579051
f D2f8 1r2	f D2f8 2	f D2f8 5.2
1.61275991096143	**37.2346292094**312	**251.237065407**353
f D2f9 1r2	f D2f9 2	f D2f9 5.2
1.61275991099128	**37.23462920**95869	**251.23706540**5439
f D2f10 1r2	f D2f10 2	f D2f10 5.2
1.61275991096154	**37.2346292094**321	**251.237065407**215

En utilisant monadiquement les valeurs de "h optimal" obtenues expérimentalement pour la fonction exponentielle avec x=0, on peut constater :

1) Pour x=1/2 :

Les 10 algorithmes fournissent les décimales communes 1.6127 , les neuf derniers fournissent les décimales communes 1.6127599 et les cinq derniers 1.6127599109

2) Pour x=2

Les dix algorithmes fournissent les décimales communes 37.23 , les neuf derniers fournissent les décimales communes 37.234629 et les trois derniers 37.234629209.

3) Pour x=5

Les dix algorithmes fournissent les décimales communes 251.2 , les neuf derniers fournissent les décimales communes 251.23706 et les algorithmes 6 8 et 10 fournissent 251.237065407

Il est légitime d'adopter **1.6127599109** , **37.234629209** et **251.237065407** pour valeurs de la dérivée d'ordre 2 respectivement aux points d'abscisses x=1/2 , x=2 et x=5. Ce ne sont pas des vérités mathématiquement prouvées ! Mais il est peu probable que plusieurs algorithmes donnent un même résultat en ayant fait exactement la même erreur … au même endroit !!!
Si ce ne sont pas des vérités mathématiquement établies, ce sont des résultats hautement probables statistiquement (*comme tout calcul complexe réalisé sur ordinateur !*).

Exemple 2 : $f(x)=\dfrac{(x^{3/2}+x+1).(Arctg(x.(e^{x}-1))}{2+e^{2x}}$ fonction qui, programmée en J sous forme explicite

f =: 3 : '(+/y^3r2 1 0)*(_3 o. y*_1+^y)%(2+^2*y)' fournit :

Dérivée d'ordre 1 pour X=1	**Dérivée d'ordre 1 pour X=2**	**Dérivée d'ordre 1 pour X=3**
f D1f1 1	f D1f1 2	f D1f1 3
0.111654047119103	**_0.2009803**50417712	**_0.05578520**80501631
f D1f2 1	f D1f2 2	f D1f2 3
0.1116540509990275	**_0.20098034471**3211	**_0.05578520752 7**92
f D1f3 1	f D1f3 2	f D1f3 3
0.1116540 51000744	**_0.20098034471**9257	**_0.0557852075 2**86875
f D1f4 1	f D1f4 2	f D1f4 3
0.111654050917234	**_0.200980344 7**35123	**_0.0557852075**863528
f D1f5 1	f D1f5 2	f D1f5 3
0.111654050999716	**_0.20098034471**4961	**_0.0557852075 27**682
f D1f6 1	f D1f6 2	f D1f6 3
0.111654050999853	**_0.200980344715**212	**_0.05578520752772**07
f D1f7 1	f D1f7 2	f D1f7 3
0.111654050950305	**_0.200980344715**148	**_0.0557852075277**106
f D1f8 1	f D1f8 2	f D1f8 3
0.111654050743335	**_0.2009803447 15**12	**_0.05578520752772**81
f D1f9 1	f D1f9 2	f D1f9 3
0.111653768718252	**_0.200980344**667113	**_0.05578520752**96267
f D1f10 1	f D1f10 2	f D1f10 3
0.111653807963693	**_0.200980344**73913	**_0.05578520752 7**6591

Exemple 3 : Calcul de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{N\to\infty}[(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}) - Log(N)]$ en utilisant les propriétés suivantes de $\Gamma(1+x) = !x$:

$\gamma = 1 - \Gamma^{'}(2)$	$\gamma = -\Gamma^{'}(1)$	$\gamma = (3 - \Gamma^{'}(3))/2$
1 – Γ'(2)	**- Γ'(1)**	**(3 - Γ'(3))/2**
1 - ! D1f1 1x	- ! D1f1 0x	-: 3- ! D1f1 2
0.577215664681162	**0.5772156**50277019	**0.5772156**23310977
1 - ! D1f2 1x	- ! D1f2 0x	-: 3- ! D1f2 2
0.577215664768812	**0.577215664**797567	**0.577215664**827475
1 - ! D1f3 1x	- ! D1f3 0x	-: 3- ! D1f3 2
0.577215664904712	**0.5772156649**09005	**0.577215664**872458
1 - ! D1f4 1x	- ! D1f4 0x	-: 3- ! D1f4 2
0.57721566380467	**0.577215664**271672	**0.57721566**3804901
1 - ! D1f5 1x	- ! D1f5 0x	-: 3- ! D1f5 2
0.577215664901915	**0.5772156649**02491	**0.5772156649**02434
1 - ! D1f6 1x	- ! D1f6 0x	-: 3- ! D1f6 2
0.577215664901542	**0.577215664901**709	**0.577215664901**493
1 - ! D1f7 1x	- ! D1f7 0x	-: 3- ! D1f7 2
0.577215664901075	**0.577215664**888324	**0.577215664901**648
1 - ! D1f8 1x	- ! D1f8 0x	-: 3- ! D1f8 2
0.577215664901448	**0.57721566**481205	**0.577215664901**548
1 - ! D1f9 1x	- ! D1f9 0x	-: 3- ! D1f9 2
0.577215664861567	**0.5772156**30163909	**0.577215664**893432

La valeur exacte pour ses 15 premières décimales est : **γ = 0.577215664901**532

Exemple 4 : f(x) = (1+x^2).Arctg(x)

En J : f =: 3 : ' (1+*:y)*_3 o. y'

Pi = 2 * ($f^{(1)}$(1) – 1)	**Pi = 2*($f^{(2)}$(1) – 1)**	**$f^{(3)}$(1) = 1**
2 * _1 + f D1f1 1	2 * _1 + f D2f1 1	f D3f1 1
3.14159265163627	**3.14162**934450724	**0.99**8423072612948
2 * _1 + f D1f2 1	2 * _1 + f D2f2 1	f D3f2 1
3.14159265362299	**3.1415926**7678461	**0.99999**6305849972
2 * _1 + f D1f3 1	2 * _1 + f D2f3 1	f D3f3 1
3.14159265357371	**3.1415926**6806757	**1.000000**34103094
2 * _1 + f D1f4 1	2 * _1 + f D2f4 1	f D3f4 1
3.14159265338926	**3.141592653**64785	**0.999999999**7549686
2 * _1 + f D1f5 1	2 * _1 + f D2f5 1	f D3f5 1
3.14159265359188	**3.14159265**28602	**1.0000000**513374
2 * _1 + f D1f6 1	2 * _1 + f D2f6 1	f D3f6 1
3.14159265358978	**3.141592653**61987	**0.99999999**2886321
2 * _1 + f D1f7 1	2 * _1 + f D2f7 1	f D3f7 1
3.14159265359275	**3.141592653**21723	**1.000000**19530718
2 * _1 + f D1f8 1	2 * _1 + f D2f8 1	f D3f8 1
3.14159265359014	**3.1415926535**6285	**0.99999999**479101
2 * _1 + f D1f9 1	2 * _1 + f D2f9 1	f D3f9 1
3.14159265378351	**3.14159265**175351	**1.00000000**310313

Valeur exacte de Pi :

o. 1

3.14159265358979

V) ANNEXES

Annexe 1

(a) <u>Simplification d'une expression de la forme</u>
$Z = \{c_1.g(x_1)+c_2.g(x_2)+\ldots+c_N.g(x_N)\}$ où
les x_i sont dans un intervalle $]a,b[$, les c_i sont tous > 0, g est continue dans $[a,b]$
On a $Z = \{c_1+c_2+\ldots+c_N\}.M$ où M est la moyenne pondérée par les N constantes des $g(x_i)$, laquelle est comprise entre la plus petite et la plus grande. La fonction g étant continue dans $[a,b]$, il existe $x \in\ ]a,b[$ tel que $g(x) = M$.
Donc $Z = C.g(x)$ où x est inconnu (mais vérifie $x \in\ ]a,b[$) et C est une constante > 0.

(b) <u>Simplification d'une expression de la forme</u>
$Z = \{c_1.h(x_1)+c_2.h(x_2)+\ldots+c_N.h(x_N)\}$ où
les x_i sont dans un intervalle $]a,b[$, h est continue dans $]a,b[$ mais les c_i sont réels.
Z est encore une moyenne pondérée, mais celle-ci n'est plus obligatoirement située entre la plus petite et la plus grande des valeurs $f(x_i)$ car des constantes peuvent être négatives.
Nous pouvons raisonner sur les valeurs absolues :
$|Z| \leq \{|c_1|.g(x_1)+|c_2|.g(x_2)+\ldots+|c_N|.g(x_N)\}$ où $g(x) = |f(x)|$ (donc g est aussi continue).
D'après (a) nous pouvons affirmer que le contenu des parenthèses est égal à $C.|f(x)|$ et que $|Z| \leq C.\ |f(x)|$ où $C = |c_1|+|c_2|+\ldots+|c_N| > 0$, $x \in\ ]a,b[$. Or x est inconnu.
On peut donc affirmer : $|Z| \leq C.\ M$ où $M =$ Sup $(|\ f(x)\ |)$ quand $x \in [a,b]$.

(c) <u>Simplification d'une expression de la forme</u>
$Z = \{c_1.f^{(I+J)}(x_1)+c_2.\ f^{(I+J)}(x_2)+\ldots+c_N.\ f^{(I+J)}(x_N)\}$ où
$f^{(I+J)}(x)$ est continue dans $[a,b]$, les x_i sont dans $[a,b]$, les cstes c_i sont réelles.
D'après (a) et (b) :
Il existe x dans $[a,b]$ tel que $|Z| \leq C\ .\ |f^{(I+J)}(x)|$ d'où
$|\ Z\ | \leq C\ .\ M$ avec $C = |c_1|+|c_2|+\ldots+|c_N|>0$ et $M = \sup(|f^{(I+J)}(x)|)$ quand $x \in [a,b]$.

Annexe 2 : Majorant de l'erreur systématique

$$|E_s(h)| \le [\sum_{n=1}^{N} |c_n|.k_n^{I+J}.|f^{(I+J)}(x+t_n.k_n.h)|].\frac{h^J}{(I+J)!}$$ **si J est impair**

$$|E_s(h)| \le [\sum_{n=1}^{N} |c_n|.k_n^{I+J}.(|f^{(I+J)}(x+t_n^{'}.k_n.h)|+|f^{(I+J)}(x-t_n^{''}.k_n.h)|].\frac{h^J}{(I+J)!}$$ **si J est pair**

Le contenu des crochets est une moyenne pondérée des valeurs de $|f^{(I+J)}(z)|$ pour $z \in]0,h[$ si J est impair et $z \in]-h,h[$ si J est pair. La fonction étant par hypothèse continue, il en est de même pour sa valeur absolue. Les poids étant positifs, cette moyenne est située entre le maxi et le mini de $|f^{(I+J)}(z)|$ quand z est dans l'intervalle considéré. Cette moyenne est donc égale à $f^{(I+J)}(x+t.h)|$ où $t \in]0,1[$ si J est impair et $t \in]-1,1[$ si J est pair. Evidemment, la valeur de t est inconnue. On a donc : $|E_s(h)| \le (\sum_{n=1}^{N} |c_n|.k_n^{I+J}).|f^{(I+J)}(x+t.h)|.\frac{h^J}{(I+J)!}$ avec $0 < t < 1$ si J est impair et

$$|E_s(h)| \le (\sum_{n=1}^{N} |c_n|.k_n^{I+J}).(|f^{(I+J)}(x+t_n^{'}.k_n.h)|+|f^{(I+J)}(x-t_n^{''}.k_n.h)|).\frac{h^J}{(I+J)!}$$ avec $-1 < t < 1$ si J est pair.

D'après l'annexe 1 cela se simplifie en : $\boxed{|E_s(h)| \le r_1.M.h^J}$ avec

$M = \sup(|f^{(I+J)}(x)|)$ quand $x \in [a,b]$; b=1 et a=0 si J impair et a=-1 si J pair

$r_1 = \frac{1}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} |c_n|.k_n^{I+J}$ si J est impair et $r_1 = \frac{2}{(I+J)!}\sum_{n=1}^{N} |c_n|.k_n^{I+J}$ si J est pair

r_1 dépend de I,J, des constantes c_n calculées en résolvant le système de CRAMER et des valeurs des k_n utilisées, mais ne dépend ni de f ni de ses dérivées, ni de h.

$\mathbf{f^{(I+J)}(x+t.h)}$ n'est quasiment jamais connu car ce terme dépend de t, lui-même inconnu. On ne peut qu'espérer pouvoir estimer un majorant de sa valeur absolue :
$\mathbf{M \ge |f^{(I+J)}(z)|}$ quand z est dans] 0 , h [ou] –h , h [selon le cas.

$\mathbf{h^J}$ est un terme très petit quand h < 1 et J « grand ».

On peut donc utiliser $\mathbf{|E_s(h)| < r_1 . M . h^J}$, ce qui permet d'affirmer que l'erreur systématique peut être aussi petite que l'on veut : il suffit de choisir h suffisamment petit. On peut même affirmer que l'erreur systématique tend vers 0 quand h tend vers 0.

L'erreur systématique est une notion purement mathématique qui ne dépend que de l'algorithme utilisé et ignore l'outil de calcul utilisé.

Elle nous permet d'affirmer que **si nous disposions d'un outil de calcul exécutant tous les calculs intermédiaires avec une infinité de décimales, nous pourrions obtenir une erreur aussi voisine de 0 que l'on pourrait le souhaiter**.

Mais … un tel outil de calcul n'est pas encore inventé ! Il faut donc estimer l'erreur d'arrondi engendrée par cette limitation de l'outil de calcul.

L'erreur systématique est celle qui est analysée par le mathématicien pur. Le numéricien ne peut s'en contenter. Il doit composer avec la précision de l'outil de calcul et évaluer l'erreur d'arrondi.

<u>Annexe 3</u> : Recherche d'un h optimal et de l'erreur optimale

il est illusoire et dangereux de choisir h trop petit. Il faut

choisir h au voisinage de l'optimum h_{opt} donnant une erreur minimale.

Si on raisonne en valeurs absolues majorées :

$E(h) = r_1.M.h^J + r_2.\varepsilon/h^I$ avec $M = \mathrm{Sup}(|f^{(I+J)}(z)|)$ et z Є]x- h, x+ h[ou]0, h[. En dérivant / h on obtient :

$E(h)' = J.r_1.M.h^{J-1} - r_2.\varepsilon.I/h^{I+1}$; $E'(h) = 0$ impose : $h^{I+J} = (r_2.\varepsilon.I)/(r_1.J.M)$ et

$\boxed{\mathbf{h_{opt} = a_1/M^{1/(I+J)}}}$ avec $a_1 = ((r_2.I.\varepsilon)/(r1.J))^{1/(I+J)}$

puis, en reportant cette valeur dans l'expression de E(h), on obtient la valeur optimale de l'erreur :

$E_{opt} = r_1.M.(a_1/M^{1/(I+J)})^J + r_2.\varepsilon/(a_1/M^{1/(I+J)})^I$

$= r_1.M[r_2.I.\varepsilon/r_1.J.M]^{J/I+J} + r_2.\varepsilon.[r_1.J.M/r_2.I.\varepsilon]^{I/I+J}$

$= (r_1.M)^{1-J/I+J}.(r^2.\varepsilon)^{J/I+J}.(I/J)^{J/I+J} + (r_1.M)^{I/I+J}.(r_2.\varepsilon)^{1-I/I+J}.(J/I)^{I/I+J}$

$=[(I/J)^{J/I+J}+(J/J)^{I/I+J}].(r_1^I.r_2^J.\varepsilon^J)^{1/I+J}.M^{I/I+J}$ et

$\boxed{\mathbf{E_{opt} = a_2.M^{I/(I+J)}}}$ avec $a_2 = [(I/J)^{J/(I+J)} + (J/I)^{I/(I+J)}].(r_1^I.r_2^J.\varepsilon^J)^{1/(I+J)}$

<u>Annexe 4</u> : 3 exemples complets (à la « main »)
Exemple 1 : Calcul numérique de $f^{(2)}(x)$ avec une erreur systématique en h^4

Partons des formules :

$P(k) = f(x+k.h) + f(x-k.h) - 2.f(x)$ et

$P(k) = 2.\{f^{(2)}(x)k^2.h^2/2!+f^{(4)}(x)k^4.h^4/4!+f^{(6)}(x+t.k.h)k^6.h^6/6!\}$; $\_1 < t < 1$

Cherchons une combinaison linéaire $CL = c1 \cdot P(1/2) + c2 \cdot P(2/2)$ annulant le facteur de $f^{(4)}(x)h^4$ et égalant à 1 celui de $f^{(2)}(x)h^2$. Il faut vérifier les équations :

$c_1(1/2)^2 + c_2(2/2)^2 = (2\,!)/2$

$c_1(1/2)^4 + c_2(2/2)^4 = 0$ qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ système linéaire admettant pour solution : $c_1 = 16/3$ $c_2 = -1/3$

Le facteur de $f^{(6)}(x+t.h).h^6$ est alors : $c_{err} = 2.(c_1(1/2)^6 + c_2(1)^6)/6\,! = -1/1440$

$c_0 = -2.\ (c1+c2) = -2.\ (5) = -10$ On en déduit :

$f^{(2)}(x) = \{-10.f(x)+(16/3).(f(x+h/2)+ f(x-h/2))-(1/3).(f(x+h)+f(x-h))\}/h^2$
$+f^{(6)}(x+t.h).h^4/1440$ $-1 < t < 1$

Programmation en J (sous forme d'un pro-adverbe) :

```
  D2f4 =: 1 : 0
[ :
:
 (+/_10 16r3 16r3 _1r3 _1r3*u y+x*0 1r2 _1r2 1 _1)%x^2
)
```

Après quelques tâtonnements (avec exp =: ^ : [: et X = 0) :

```
     1- 0.00776 0.00775 0.00774 (exp    D2f4"0 0) 0
4.22429e_12 _1.87048e_11 1.72747e_11
      1-  0.00775  (exp D2f4) 0
_1.87048e_11
```

D'où **h_{opt} = 0.00775 et E_{opt} = -1.87048**

D2f4 = : 1 : Ch =. Autoprog 2 4

On obtient :

```
       D2f4 =: 1 : 0             NB. Es en h^4
0.00775 (u D2f4) y               NB. Er=_1.87e_11 pour u=exp(X), X=0 et h=0.00775  NB. à la main !
:
                                 NB. hopt = 0.0144796 % M ^ 1r6
                                 NB. Eopt = 1.52629e_10 * M ^ 1r3
(+/_10 16r3 16r3 _1r3 _1r3*u y+x*0 1r2 _1r2 1 _1)%x^2
)
```

Seule la 2e ligne (*expression monadique*) a été ajoutée « à la main ».

<u>Exemple 2</u> : Calcul numérique de $f^{(3)}(x)$ avec une erreur systématique en h^4

Partons des formules :

$I(k) = f(x+k.h) - f(x-k.h)$ et

$I(k) = 2.\{f^{(1)}(x)k^1.h^1/1!+f^{(3)}(x)k^3.h^3/3!+f^{(5)}(x)k^5.h^5/5!+f^{(7)}(x+t.k.h).k^7.h^7/7!\}$; _1 < t < 1

Cherchons une combinaison linéaire $CL = c_1 \cdot I(1/3) + c_2 \cdot I(2/3) + c_3 \cdot I(1)$ annulant les facteurs de $f^{(1)}(x)h^1$ et $f^{(5)}(x)h^5$ et égalant à 1 celui de $f^{(3)}(x)h^3$

Il faut vérifier les équations :

$c_1(1/3) + c_2(2/3) + c_3(1) = 0$

$c_1(1/3)^3+c_2(2/3)^3+c_3(1)^3 = (3!)/2$

$c_1(1/3)^5 +c_2(2/3)^5+c_3(1)^5 = 0$ qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (1/3)^1 & (2/3)^1 & (3/3)^1 \\ (1/3)^3 & (2/3)^3 & (3/3)^3 \\ (1/3)^5 & (2/3)^5 & (3/3)^5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

système linéaire qui admet pour solution : $c_1 = -351/8$ $c_2 = 27$ $c_3 = -27/8$

le facteur de $f^{(7)}(x+t.h)h^7$ est alors : $c_{err} = (c_1(1/3)^7+c_2(2/3)^7+c_3(1)^7)$ /(!7) = -7/9720

On en déduit les 2 expressions :

CL={(-351/8).f(x+h/3)+(351/8).f(x-h/3)+27.f(x+2.h/3)-27.f(x-2.h/3)-(27/8)f(x+h)+(27/8)f(x-.h)}

CL= $f^{(3)}(x)h^3 - (7/9720)f^{(7)}(x+t.h)h^7$ avec $-1 < t < 1$ et par suite :

$f^{(3)}(x)$ = {(-351/8).f(x+h/3)+(351/8).f(x-h/3)+27.f(x+2.h/3)-27.f(x-2.h/3)-(27/8)f(x+h)

+(27/8)f(x-.h)}/h^3 + (7/9720)$f^{(7)}(x+t.h)h^4$ avec -1 < t < 1

Programmation en J d'un pro-adverbe : (à la main)

```
  D3f4 =: 1 : 0
[ :
:
 (+/_351r8 351r8 27 _27 _27r8 27r8*u y+x*1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^3
)
```

En tâtonnant, recherche de l'erreur minimale expérimentalement pour exp(x) et X=0 :

```
      1 -  0.01443  0.01442  0.01441  (exp   D3f4"0 0) 0   NB.  hopt = 0.01442
_1.40625e_9  8.06081e_11  7.68063e_10                      NB.  Eopt = 8e_11
```

```
        D3f4 = : 1 : Ch =. Autoprog 3 4
```

On obtient : (à la main)

```
        D3f4 =: 1 : 0            NB. Es en h^4
0.01442 (u D3f4) y               NB. Er=8e_11 pour u=exp(X), X=0 et h=0.01442
:
                                 NB. hopt = 0.0343487 % M ^ 1r7
                                 NB. Eopt = 6.41262e_9 * M ^ 3r7
(+/_351r8 351r8 27 _27 _27r8 27r8*u y+x*1r3 _1r3 2r3 _2r3 1 _1)%x^3
)
```

Seule la 2e ligne (*expression monadique*) a été ajoutée « à la main ».

Exemple 3 : Calcul numérique de $f^{(4)}(x)$ avec une erreur systématique en h^3

Partons des formules : **$T(k) = f(x+k.h) - f(x)$** et

**$T(k) = \{f^{(1)}(x)k^1.h^1/1!+ f^{(2)}(x)k^2.h^2/2! + f^{(3)}(x)k^3.h^3/3!+f^{(4)}(x)k^4.h^4/4!+f^{(5)}(x)k^5.h^5/5!$
$+f^{(6)}(x)k^6.h^6/6! +f^{(7)}(x+t.k.h)k^7.h^7/7!\}$** ; $0 < t < 1$

Cherchons une combinaison linéaire

$CL = c_1 \cdot T(\frac{1}{6}) + c_2 \cdot T(\frac{2}{6}) + c_3 \cdot T(\frac{3}{6}) + c_4 \cdot T(\frac{4}{6}) + c_5 \cdot T(\frac{5}{6}) + c_6 \cdot T(\frac{6}{6})$ annulant les facteurs de $f^{(1)}(x)h^1$ $f^{(2)}(x).h^2$ $f^{(3)}(x)h^3$ $f^{(5)}(x)h^5$ et $f^{(6)}(x).h^6$ et égalant à 1 celui de $f^{(4)}(x).h^4$.

Il faut pour cela des constantes c_n vérifiant le système de CRAMER :
$c_1(1/6)^1 + c_2(2/6)^1 + c_3(3/6)^1 + c_4(4/6)^1 + c_5(5/6)^1 + c_6(6/6)^1 = 0$
$c_1(1/6)^2 + c_2(2/6)^2 + c_3(3/6)^2 + c_4(4/6)^2 + c_5(5/6)^2 + c_6(6/6)^2 = 0$
$c_1(1/6)^3 + c_2(2/6)^3 + c_3(3/6)^3 + c_4(4/6)^3 + c_5(5/6)^3 + c_6(6/6)^3 = 0$
$c_1(1/6)^4 + c_2(2/6)^4 + c_3(3/6)^4 + c_4(4/6)^4 + c_5(5/6)^4 + c_6(6/6)^4 = 4!$
$c_1(1/6)^5 + c_2(2/6)^5 + c_3(3/6)^5 + c_4(4/6)^5 + c_5(5/6)^5 + c_6(6/6)^5 = 0$
$c_1(1/6)^6 + c_2(2/6)^6 + c_3(3/6)^6 + c_4(4/6)^6 + c_5(5/6)^6 + c_6(6/6)^6 = 0$
qui s'écrit sous forme matricielle (après multiplication de la ligne k par 6^k) :

$$\begin{pmatrix} 1^1 & 2^1 & 3^1 & 4^1 & 5^1 & 6^1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 & 6^5 \\ 1^6 & 2^6 & 3^6 & 4^6 & 5^6 & 6^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6^4 \cdot 4! \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ dont la résolution fournit :

c_1 = _40176 ; c_2 = 88776 ; c_3 = _104544 ; c_4 = 69336 ; c_5 = _24624 ; c_6 = 3672
On calcule $c_0 = -(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6) = 7560$
et $c_{err} = (c_1.1^7 + c_2.2^7 + c_3.3^7 + c_4.4^7 + c_5.5^7 + c_6.6^7)/7\,! = 4536$

On en déduit :
$CL = \{c_1.T(1/6) + c_2.T(2/6) + c_3.T(3/6) + c_4.T(4/6) + c_5.T(5/6) + c_6.T(6/6)\}$ et
$CL = f^{(4)}(x).h^4 + 4536.f^{(7)}(x+t.h).h^7$; $0 < t < 1$ d'où l'expression cherchée :

**$f^{(4)}(x) = \{7560.f(x) -40176.f(x+h/6)+88776.f(x+h/3)-104544.f(x+h/2)-69336.f(x+2.h/3)$
$-24624.f(x+5.h/6) +3672.f(x+h)\}/h^4 - 4536.f^{(7)}(x+t.h).h^3$**

Programmation en J d'un pro-adverbe

```
        D4f3 =: 1 : 0           NB. Es en h^3
0.049 (u D4f3 ) y               NB. Er=2.73e_7 pour u=exp(X), X=0 et h=0.049
:
                                NB. hopt = 0.0393935 % M ^ 1r7
                                NB. Eopt = 0.000328156 * M ^ 4r7
(+/7560 _40176 88776 _104544 69336 _24624 3672x*u y+x*0 1r6 1r3 1r2 2r3 5r6 1)%x^4
)
```

Seule la 2e ligne (*expression monadique*) a été ajoutée « à la main ».

Annexe 5 : **Programmation automatique avec « Multiautoprog »**

On charge l'espace de travail « derivauto.ijs », puis on exécute le pro-verbe « Multiautoprog » :

Ex :

```
   Multiautoprog 2 ; 1+i.9
D2f1  D2f2  D2f3  D2f4  D2f5  D2f6  D2f7  D2f8  D2f9
```

Qui retourne la liste des pro-adverbes créés. En voici un :

```
      D2f4
1 : 0
NB. Es en h^4
[: NB. hopt (u Adv) y      NB. Er=     pour u=exp(X), X=0 et h=
:
NB. hopt = 0.0144796 % M ^ 1r6
NB. Eopt = 1.52629e_10 * M ^ 1r3
(+/_10 16r3 16r3 _1r3 _1r3*u y+x*0 1r2 _1r2 1 _1)%x^2
)
```