CALCUL AVEC DES PARTIES ENTIÈRES

R.Coquidé (28/11/2018)

I) DÉFINITIONS

Def01

$$[affirmation]=\begin{pmatrix} 0\, si\, affirmation\, fausse \\ 1\, si\, affirmation\, vraie \end{pmatrix}$$

Def02 (notation « Iverson ») $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor = (plus\, grand\, entier\, inférieur\, ou\, égal\, à\, x)$$
$$\lceil x \rceil = (plus\, petit\, entier\, supérieur\, ou\, égal\, à\, x)$$

Def03 pour $x, y \in \mathbb{R}$

Si y=0 : $r = x\, mod\, 0 = x$

Si y>0 : $r = x\, mod\, y = x - k.y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < y$

Si y<0 : $r = x\, mod\, y = x - k.y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y < r \leqslant 0$

Def04

$$fr(x) = x - \lfloor x \rfloor = x\, mod\, 1 = partie\, fractionnaire\, de\, x$$

II) EN J

Les dyad « `= ~: > < >: <: e. -:` » donnent pour réponse 0 ou 1

On utilise les monad `<.` et `>.` pour calculer $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$

```
    mod =: |~
    fr  =: 1&|
```

Ex :

```
   1 _2 0 5 < 0
0 1 0 0
   3 5.2 6 7 <: 8 3.7 _3 7
1 0 0 1
   <. 0 _5 2.3 _6.2
0 _5 2 _7
   >. 0 _5 2.3 _6.2
0 _5 3 _6
   5 _1.1 2.3 7 e. 8 5 2.3
1 0 1 0
```

```
   7 _6 12.2 _9.3 mod 5
2 4 2.2 0.7
   77r3 _68r5 mod 51r10
1r6 17r10
   77 _65 3 mod 7
0 5 3
   77 _65 3 mod _7
0 _2 _4
   23 _7 66.2 _0.3 mod 0
23 _7 66.2 _0.3
   fr 45.23 _55 _63.7 _0.4
0.23 0 0.3 0.6
```

III) PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES $(\ x,y,z\in\mathbb{R};m,n\in\mathbb{Z}\ )$:

(a)

$$\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=[x\notin\mathbb{Z}]=\begin{matrix}0(si\,x\in\mathbb{Z})\\1(si\,x\notin\mathbb{Z})\end{matrix}\qquad\qquad [x\notin\mathbb{Z}]=[fr(x)>0]$$

Test en J :

```
    Testa =: (>.-<.),(0:<fr)  NB. Valeurs égales
    (],.Testa"0) 23 23.1 23.8 _23 _23.6 0
 23    0 0
 23.1 1 1
 23.8 1 1
_23    0 0
_23.6 1 1
  0    0 0
```

(b)

$$(x-1)<\lfloor x\rfloor\leq x\leq\lceil x\rceil<(x+1)$$

Test en J :

```
    Testb =: 3 : 0
A=.(y-1)<<.y
B=.(<.y)<:y
C=. y<:>.y
D=.(>.y)<y+1
A*.B*.C*.D
)
```

```
   Testb 4 _4 5.2 _5.2 0
1 1 1 1 1

NB. 1 = c'est tout bon
```

(c)

$$(\lfloor x\rfloor=n)\Leftrightarrow(n\leqslant x<n+1)\Leftrightarrow(x-1<n\leqslant x)$$
$$(\lceil x\rceil=n)\Leftrightarrow(n-1<x\leqslant n)\Leftrightarrow(x\leqslant n<x+1)$$

Test en J :

```
    Testc =: 4 : 0
n=.y
A=.(<.x)=n
B=.(n<:x)*.x<n+1
C=.((x-1)<n)*.n<:x
D=.(>.x)=n
E=.((n-1)<x)*.x<:n
F=.(x<:n)*.n<x+1
(A,B,C),:(D,E,F)
)
```

```
    45 Testc 45
1 1 1
1 1 1  NB. Valeurs égales
    45.23 Testc 45
1 1 1
0 0 0
    45.23 Testc _17
0 0 0
0 0 0
```

(d)

$(\lfloor x\rfloor<n)\Leftrightarrow(x<n)$	$(n<\lceil x\rceil)\Leftrightarrow(n<x)$
$(\lceil x\rceil\leqslant n)\Leftrightarrow(x\leqslant n)$	$(n\leqslant\lfloor x\rfloor)\Leftrightarrow(n\leqslant x)$

Test en J :

```
    Testd =: 4 : 0
n=.y
A=.((<.x)<n)=(x<n)
B=.(n<>.x)=(n<x)
C=.((>.x)<:n)=(x<:n)
D=.(n<:<.x)=(n<:x)
2 2$A,B,C,D
)
```

```
    45.2 Testd 45
1 1
1 1   NB. 1 = c'est tout bon
    _45.2 Testd 46
1 1
1 1

    45.2 Testd _80
1 1
1 1
```

(e)

$\lfloor -x\rfloor=-\lceil x\rceil$	$\lceil -x\rceil=-\lfloor x\rfloor$

Test en J :

```
    Teste =: 3 : 0
X=.y
A=.(<.-X)=(->.X)
B=.(>.-X)=(-<.X)
A,B
)
   NB. 1 = c’est tout bon
```

```
    Teste 45
1 1
    Teste 45.2
1 1
    Teste 45.2
1 1
    Teste _45.2
1 1
    Teste 0
1 1
```

(f)

$\lfloor x\pm n\rfloor=\lfloor x\rfloor\pm n$	$\lceil x\pm n\rceil=\lceil x\rceil\pm n$

Test en J :

```
    Testf =: 4 : 0
n=.y
A=.(<.x+n)=(<.x)+n
B=.(>.x+n)=(>.x)+n
C=.(<.x-n)=(<.x)-n
D=.(>.x-n)=(>.x)-n
A,B,C,D
)
```

```
    45 Testf 23
1 1 1 1 NB. 1 = c’est tout bon
    45.2 Testf 25
1 1 1 1
    _45.2 Testf 25
1 1 1 1
    45.2 Testf _25
1 1 1 1
    45.2 Testf 0
1 1 1 1
```

(g)

$\lfloor x \pm y \rfloor = \lfloor x \rfloor \pm \lfloor y \rfloor + \lfloor fr(x) \pm fr(y) \rfloor$	$fr(x) + fr(-x) = [x \notin \mathbb{Z}]$

Test en J :

```
Testg =: 4 : 0
A=.(<.x+y)
B=.(<.x)+(<.(fr x)+fr y)+(<.y)
C=.(<.x-y)
D=.(<.x)+(<.(fr x)-fr y)-(<.y)
(A=B),(C=D)
)
NB. 1 = c’est tout bon
```

```
   45 Testg 45
1 1
   45 Testg 45.2
1 1
   45.2 Testg 45.2
1 1
   45.2 Testg _85.4
1 1
   80r7 Testg _72r11
1 1
```

(h)

$\lceil x \pm y \rceil = \lceil x \rceil \pm \lceil y \rceil + \lceil fr(x) \pm fr(y) \rceil - ([x \notin \mathbb{Z}] \pm [y \notin \mathbb{Z}])$

Test en J :

```
   Testh =: 4 : 0     NB. 1 = c’est tout bon
A=.(>.x+y)=((>.x)+>.y)+(>.(fr x)+fr y)-(0<fr x)+0<fr y
A,B=.(>.x-y)=((>.x)->.y)+(>.(fr x)-fr y)-(0<fr x)-0<fr y
)
   54.2 Testh 54
1 1
   54.2 Testh _65.7
1 1
   _12.6 Testh 31.2
1 1
```

(i)

$A = (x.y) mod (x.z) = x.(y\, mod\, z)$	$(z \neq 0) \Rightarrow A = x.z.fr(\frac{y}{z})$

Test en J :

```
   Testi =: 4 : 0
Z=. x [ 'X Y'=. y
A1=.(X*Y) mod X*Z
A2=.X*(Y mod Z)
if. Z = 0 do. A1,A2 return.
end.
A3=.X*Z*fr Y%Z
A1,A2,A3
)
```

```
   0 Testi 54 67
3618 3618   NB. Valeurs égales
   17 Testi 54 67
864 864 864
   17.1 Testi 54.3 67.2
863.37 863.37 863.37
   5r13 Testi 54r11 67r5
1134r715 1134r715 1134r715
   5r13 Testi 54r11 _67r5
216r715 216r715 216r715
```

(j)

La fonction $f(x)=x \, mod \, y$ est périodique de période y: $f(x)=f(x+y)$

Test en J :

```
    F=: mod & Y =.7
    F 45,45 + Y
3 3
    F _789,_789 + Y
2 2
    F 612.38,612.38 + Y
3.38 3.38
    F=: mod & Y =._17.25
    F 741.58,741.58 + Y
_0.17 _0.17
    F _624.75,_624.75 + Y
_3.75 _3.75
```

Remarque :

Pour des raisons typographiques on utilise dans la suite

$\mathbb{N}° = \{1,2,3...n, n+1,...\} = ensemble\,des\,entiers > 0$

(en général on utilise l'astérisque et non le °)

IV) THÉORÈMES

TH01 :

$$(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil \rightarrow si\ x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil \rightarrow si\ x \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

Démonstration TH01 :

Si $x \notin \mathbb{Z}$ $0 < fr(x) < 1$ donc $\lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor + fr(x) = x < \lceil x \rceil$ cqfd

Si $x \in \mathbb{Z}$ $fr(x) = 0$ donc $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$ cqfd

Test en J :

```
    Test01 =: 3 : 0
X=.y
if. 0< fr X do.
A=.(<.X)<X [ B=.X<(>.X)
else.
A=.(<.X)=X [ B=.X=(>.X)
end.
A,B
)
   NB. 1 = c'est tout bon
```

```
    Test01 54
1 1
    Test01 72
1 1
    Test01 _54.6
1 1
    Test01 _54
1 1
    Test01 0
1 1
```

TH02 :

$$\begin{pmatrix} x \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lfloor x \pm n \rfloor = \lfloor x \rfloor \pm n \\ \lceil x \pm n \rceil = \lceil x \rceil \pm n \end{pmatrix}$$

Démonstration TH02 :

On a $x = \lfloor x \rfloor + fr(x)$ où $0 \leq fr(x) < 1$ et $0 \leq r = \lceil x \rceil - x < 1$

1) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor (\lfloor x \rfloor + n) + fr(x) \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ cqfd

2) $\lceil x+n \rceil = \lceil (\lceil x \rceil + n) + r \rceil = \lceil \lceil x \rceil + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ cqfd

On peut changer n en -n car $n \in \mathbb{Z}$. cqfd

Test en J :

```
    Test02 =: 4 : 0
n=.y
A=.(<.x+n)=(<.x)+n
B=.(<.x-n)=(<.x)-n
C=.(>.x+n)=(>.x)+n
D=.(>.x-n)=(>.x)-n
A,B,C,D
)
   NB. 1 = c'est tout bon
```

```
    54 Test02 65
1 1 1 1
    54.23 Test02 65
1 1 1 1
    _54 Test02 65
1 1 1 1
    _54.14 Test02 _65
1 1 1 1
    0 Test02 65
1 1 1 1
```

TH03 :

$$\begin{pmatrix} n\in\mathbb{Z} \\ m\in\mathbb{N}° \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor \\ \lfloor \frac{n}{m} \rfloor = \lceil \frac{n-m+1}{m} \rceil \end{pmatrix}$$

Démonstration TH03 :

On peut écrire $n=am+r$ $a,r\in\mathbb{Z}$ $0\le r\le m-1$ $0\le\frac{r}{m}\le 1-\frac{1}{m}$ $-1<\frac{1-m}{m}\le\frac{1+r-m}{m}\le 0$ donc :

$\lfloor\frac{n}{m}\rfloor=\lfloor\frac{am+r}{m}\rfloor=\lfloor a+\frac{r}{m}\rfloor=a$ $\lceil\frac{n-m+1}{m}\rceil=\lceil\frac{am-m+r+1}{m}\rceil=\lceil a+\frac{1+r-m}{m}\rceil=a$ $\Rightarrow$ $\lfloor\frac{n}{m}\rfloor=\lceil\frac{n-m+1}{m}\rceil$ cqfd

Puisque $n\in\mathbb{Z}$ on peut changer n en -n : $\lfloor\frac{-n}{m}\rfloor=\lceil\frac{-n-m+1}{m}\rceil$ on applique alors la propriété élémentaire (e) en changeant tout de signe : $\lceil\frac{n}{m}\rceil=\lfloor\frac{n+m-1}{m}\rfloor$ cqfd

Test en J :

```
    Test03 =: 4 : 0
m=.x [ n=.y I=. 2 3
A=.(>.n%m) [ B=.(<.(n+m-1)%m)
C=.(<.n%m) [ D=.(>.(n+1-m)%m)
('(A,B)=',I":A,B),' ;
(C,D)=',I":C,D
)
    NB. Valeurs égales
```

```
    55 Test03 17
(A,B)= 1 1 ; (C,D)= 0 0
    55 Test03 _23
(A,B)= 0 0 ; (C,D)=_1 _1
    55 Test03 15
(A,B)= 1 1 ; (C,D)= 0 0
    55 Test03 0
(A,B)= 0 0 ; (C,D)= 0 0
```

TH04 :

$$\begin{pmatrix} m\in\mathbb{N}°;n\in\mathbb{Z} \\ x\in\mathbb{R} \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \lfloor\frac{x\pm n}{m}\rfloor=\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor\pm n}{m}\rfloor \\ \lceil\frac{x\pm n}{m}\rceil=\lceil\frac{\lceil x\rceil\pm n}{m}\rceil \end{pmatrix}$$

Démonstration TH04 :

1) Si $x\in\mathbb{Z}$ c'est évident car $\lfloor x\rfloor=x=\lceil x\rceil$

2) Si $x\notin\mathbb{Z}$ On peut écrire x+n=cm+z avec $c\in\mathbb{Z}$ et $z\in\mathbb{R}$ $0<z<m$ $0<\frac{z}{m}<1$

$\lfloor x\rfloor+n=cm+z'$ avec $z'\in\mathbb{R}$ $0<z'<m$ $0<\frac{z'}{m}<1$

$\lfloor\frac{x+n}{m}\rfloor=\lfloor\frac{cm+z}{m}\rfloor=\lfloor c+\frac{z}{m}\rfloor=c+\lfloor\frac{z}{m}\rfloor=c$ $\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+n}{m}\rfloor=\lfloor\frac{cm+z'}{m}\rfloor=\lfloor c+\frac{z'}{m}\rfloor=c+\lfloor\frac{z'}{m}\rfloor=c$

donc : $\lfloor\frac{x+n}{m}\rfloor=\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+n}{m}\rfloor$ cqfd x et n peuvent être changés de signe :

$\lfloor\frac{-x-n}{m}\rfloor=\lfloor\frac{\lfloor -x\rfloor-n}{m}\rfloor$ et avec la propriété (e) $\lfloor -U\rfloor=-\lceil U\rceil$ il vient :

$-\lceil \frac{x+n}{m} \rceil = \lfloor \frac{-\lceil x \rceil - n}{m} \rfloor = -\lceil \frac{\lceil x \rceil + n}{m} \rceil$ donc $\lceil \frac{x+n}{m} \rceil = \lceil \frac{\lceil x \rceil + n}{m} \rceil$ cqfd

Puisque n peut être négatif, on peut remplacer +n par -n dans ces formules cqfd

Test en J :

```
   Test04=: 4 : 0
'm n'=.y
A=.(<.(x+n)%m)=<.((<.x)+n)%m
B=.(<.(x-n)%m)=<.((<.x)-n)%m
C=.(>.(x+n)%m)=>.((>.x)+n)%m
D=.(>.(x-n)%m)=>.((>.x)-n)%m
A,B,C,D
)
```

```
    53.4 Test04 7 23
1 1 1 1
    53.4 Test04 12 _7
1 1 1 1
    _55.4 Test04 54 17
1 1 1 1

   NB. 1 = c'est tout bon
```

TH05 :

$$\begin{pmatrix} n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{N}° \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} n = \sum_{k=0}^{m-1} \lfloor \frac{n+k}{m} \rfloor \\ n = \sum_{k=0}^{m-1} \lceil \frac{n-k}{m} \rceil \end{pmatrix}$$

Démonstration TH05 :

On peut toujours écrire n=am+b où $a, b \in \mathbb{Z}$ $0 \le b \le m-1$ et répartissons n dans m boîtes dont le numéro k varie de 0 à m-1 de la façon suivante :

1) On place a dans chaque boîte (la somme est ma)

2) On ajoute 1 dans les b boîtes numérotées de m-b à m-1 (la somme est ma+b=n)

La k ième boîte contient a si $0 \le k \le m-b-1$, et a+1 si $m-b \le k \le m-1$

Pour chaque boîte calculons $\lfloor \frac{n+k}{m} \rfloor = \lfloor a + \frac{b+k}{m} \rfloor = a + \lfloor \frac{b+k}{m} \rfloor = a + [k \geqslant m-b]$

Les m-b premières boîtes contiennent donc a= $\lfloor \frac{n+k}{m} \rfloor$

les b dernières contiennent a+1= $\lfloor \frac{n+k}{m} \rfloor$ Par suite $n = \sum_{k=0}^{m-1} \lfloor \frac{n+k}{m} \rfloor$ cqfd. Puisque n peut être négatif, changeons son signe $-n = \sum_{k=0}^{m-1} \lfloor \frac{-n+k}{m} \rfloor$ et appliquons la propriété (e) :

$-n = \sum_{k=0}^{m-1} \lfloor \frac{-n+k}{m} \rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} -\lceil \frac{n-k}{m} \rceil$ donc $n = \sum_{k=0}^{m-1} \lceil \frac{n-k}{m} \rceil$ cqfd

Test en J :

```
  Test05=: 4 : 0
m=.x [ n=.y
A=.+/<.(n+i.m)%m
B=.+/>.(n-i.m)%m
n,A,B
)
```

```
    51 Test05 22
22 22 22   NB. Valeurs égales
    56 Test05 12
12 12 12
    56 Test05 _35
_35 _35 _35
    56 Test05 56
56 56 56
```

TH06 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ m\in\mathbb{N}^\circ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lfloor x\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor \frac{x+k}{m}\rfloor \\ \lfloor mx\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor \\ \lceil x\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil \frac{x-k}{m}\rceil \\ \lceil mx\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil x-\frac{k}{m}\rceil \end{pmatrix}$$

Démonstration TH06 :

On utilise les TH04 et TH05 : $n=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{n+k}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{n-k}{m}\rceil \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

$$n=\lfloor x\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+k}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+k}{m}\rfloor \text{ cqfd}$$

$$n=\lfloor mx\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{\lfloor mx\rfloor+k}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{mx+k}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor \text{ cqfd}$$

$$n=\lceil x\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{\lceil x\rceil-k}{m}\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{x-k}{m}\rceil \text{ cqfd}$$

$$n=\lceil mx\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{\lceil mx\rceil-k}{m}\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{mx-k}{m}\rceil=\sum_{k=0}^{m-1}\lceil x-\frac{k}{m}\rceil \text{ cqfd}$$

Test en J :

```
    Test06 =: 4 : 0
K=.i.m =.y
A=.(<.x) = (+/<.(x+K)%m)
B=.(<.m*x) = (+/<.x+K%m)
C=.(>.x) = (+/>.(x-K)%m)
D=.(>.m*x) = (+/>.x-K%m)
A,B,C,D
)
```

```
    53.2 Test06 11
1 1 1 1
    _53.2 Test06 11
1 1 1 1
    0 Test06 11
1 1 1 1
    56 Test06 36
1 1 1 1
  NB. 1 = c'est tout bon
```

TH07 :

$$\begin{pmatrix} n\in\mathbb{Z}\,;m\in\mathbb{N}^\circ \\ PGCD(m,n)=d \\ m=a.d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bigcup_{k=0}^{m-1}\{(\pm kn)\,mod\,m\}=d.fois\,E_{d,a} \\ E_{d,a}=\{0,d,2d,\ldots,(a-1)d\} \\ (multi-ensemble) \end{pmatrix}$$

Démonstration TH07 :

On a d=PGCD(m,n) ; m=ad ; n=bd ; $a,b\in\mathbb{Z}$; $a\geqslant 1$; PGCD(a,b)=1; f(k)=(kb)mod a
f(k) de période a; Posons A={0,1,2…,a-1} et M={0,1,2…,m-1}
$(k=0,1,2\ldots,a-1)\Rightarrow(kb)mod\,a\in A$ Si (kb)mod a=(k'b)mod a = r il vient
kb=pa+r et k'b=qa+r d'où (k-k')b=(p-q)a et a divise k-k' (car a et b premiers entre eux)
C'est impossible sauf si k-k'=0 ou k=k'. Par suite : $k\neq k'\Rightarrow(kb)mod\,a\neq(k'b)mod\,a$
et $k=0,1\ldots,a-1\Rightarrow(kb)mod\,a\in A$ tous les éléments de A atteints fois et 1 seule.
(kn)mod m = (kbd)mod (ad) = $d(kb)mod\,a\in dA=E_{d,a}$
La fonction f(k) ayant la période a, quand k décrit l'ensemble M ,f(k) décrit d fois dA cqfd
De plus, n pouvant être négatif, on peut changer son signe. cqfd

Test en J :

```
    Test07 =: 4 : 0
M=.i.m=.x [ n=.y
Z=./:~(M*n)mod m
a=.m%d=.m +. n
,.(d,a);|:(a,d)$Z
)
```

```
   12 Test07 9
┌───────┐
│3 4    │
├───────┤
│0 3 6 9│
│0 3 6 9│
│0 3 6 9│
└───────┘
   12 Test07 5
┌─────────────────────────┐
│1 12                     │
├─────────────────────────┤
│0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11│
└─────────────────────────┘
   12 Test07 _5
┌─────────────────────────┐
│1 12                     │
├─────────────────────────┤
│0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11│
└─────────────────────────┘
```

TH08 :

$$\begin{pmatrix} n\in\mathbb{Z}\,;m\in\mathbb{N}^\circ \\ PGCD(m,n)=d \end{pmatrix}\Rightarrow\sum_{k=0}^{m-1}((kn)mod\,m)=\frac{m(m-d)}{2}$$

Démonstration TH08 :

On peut écrire m=ad ; n=bd ; m, n entiers ; m>0

D'après le TH07, $X=\sum_{k=0}^{m-1}((kn)mod\,m)=d\sum_{k=0}^{a-1}((kbd)mod\,(ad))=d\sum_{k=0}^{a-1}d((kb)mod\,a)$

$$X=dd\sum_{k=0}^{a-1}k=dd\,\frac{a(a-1)}{2}=\frac{(ad)(ad-d)}{2}=\frac{m(m-d)}{2}\quad cqfd$$

Test en J :

```
    Test08=: 4 : 0
K=.i.m=.x [ n=.y
A=.+/(K*n)mod m
B=.-:m*m-m +. n
A,B
)
```

```
    55 Test08 12
1485 1485  NB. Valeurs égales
    55 Test08 _12
1485 1485
    55 Test08 0
0 0
    55 Test08 55
0 0
```

TH09 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ n\in\mathbb{Z}\,;m\in\mathbb{N}^\circ \\ PGCD(m,n)=d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1}\lfloor x+(\pm kn)\,mod\,m\rfloor=m(\lfloor x\rfloor+\frac{m-d}{2}) \\ \sum_{k=0}^{m-1}\lceil x+(\pm kn)\,mod\,m\rceil=m(\lceil x\rceil+\frac{m-d}{2}) \end{pmatrix}$$

Démonstration TH09

$$\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor x+(kn)\,mod\,m\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor x\rfloor+\sum_{k=0}^{m-1}(kn)\,mod\,m=m\cdot\lfloor x\rfloor+\frac{m(m-d)}{2}=m(\lfloor x\rfloor+\frac{m-d}{2})\quad cqfd$$

Test en J :

```
    Test09 =: 4 : 0
K=.i.m [ 'm n'=.y
A=.+/<.x+(K*n)mod m
B=.m*(<.x)+-:m-m+.n
C=.+/>.x+(K*n)mod m
D=.m*(>.x)+-:m-m+.n
2 2$A,B,C,D
)
     NB. Valeurs égales
```

```
    53.2 Test09 22 6
1386 1386
1408 1408
    53.2 Test09 22 _6
1386 1386
1408 1408
    _53.2 Test09 22 6
_968 _968
_946 _946
    _53.2 Test09 22 0
_1188 _1188
_1166 _1166
    53.2 Test09 48 24
3120 3120
3168 3168
```

TH10 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ n\in\mathbb{Z}\,;m\in\mathbb{N}^\circ \\ d=PGCD(m,n) \end{pmatrix}\Rightarrow(\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(\pm kn)\,mod\,m}{m}\rfloor=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor)$$

Démonstration TH10

$$S=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(kn)\,mod\,m}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(kdb)\,mod\,(da)}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+d(kb)\,mod\,a}{m}\rfloor=d\sum_{k=0}^{a-1}\lfloor\frac{x+dk}{da}\rfloor$$

$S=d\sum_{k=0}^{a-1}\lfloor\frac{(\frac{x}{d})+k}{a}\rfloor=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor$ d'après le TH06 cqfd (on a posé m=ad et n=bd)

De plus n pouvant être négatif on peut le changer de signe cqfd

Test en J :

```
    Test10 =: 4 : 0
K=.i.m [ 'm n'=.y
A=.+/<.(x+(K*n)mod m)%m
B=.d*<.x%d=.m+.n
A,B
)
```

```
65.7 Test10 28 36
64 64    NB. Valeurs égales
    65.7 Test10 28 _36
64 64
    _65.7 Test10 28 36
_68 _68
```

TH11 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ n\in\mathbb{Z};m\in\mathbb{N}^{\circ} \\ PGDC(m,n)=d \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x\pm nk}{m}\rfloor=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{(m-1)(\pm n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}\right)$$

Démonstration TH11 :

$S=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+nk}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(kn)\,mod\,m}{m}+\frac{nk-(nk)\,mod\,m}{m}\rfloor$ or $\frac{nk-(nk)\,mod\,m}{m}\in\mathbb{Z}$ donc

$$S=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\lfloor\frac{x+(kn)\,mod\,m}{m}\rfloor+\frac{nk-(nk)\,mod\,m}{m}\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(kn)\,mod\,m}{m}\rfloor+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{kn}{m}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(kn)\,mod\,m}{m}$$

$S1=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(kn)\,mod\,m}{m}\rfloor=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor$ d'après le TH10

$$S2=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{nk}{m}=\frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}k=\frac{n}{m}\frac{m(m-1)}{2}=\frac{n(m-1)}{2}$$

$S3=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{(kn)\,mod\,m}{m}\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(kn)\,mod\,m=\frac{1}{m}\frac{m(m-d)}{2}=\frac{m-d}{2}$ d'après le TH08 et

S=S1+S2-S3= $d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{n(m-1)}{2}-\frac{m-d}{2}=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{nm-n-m}{2}+\frac{d}{2}=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{nm-n-m+1}{2}+\frac{d-1}{2}$

$S=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}$ cqfd

Enfin, n pouvant être négatif, on peut changer son signe. cqfd

Test en J :

```
    Test11 =: 4 : 0
K=.i.m [ d=.m+.n [ 'm n'=.y
A=.+/<.(x+n*K)%m
B=.(d*<.x%d)+-:((m-1)*(n-1))+d-1
A,B
)
```

```
   21.6 Test11 68 17
561 561
   21.6 Test11 68 _17
_578 _578
   14 Test11 68 17
510 510
  NB. Valeurs égales
```

TH12 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ m,n\in\mathbb{N}^{\circ} \\ PGCD(m,n)=d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+nk}{m}\rfloor=\sum_{k=0}^{n-1}\lfloor\frac{x+mk}{n}\rfloor=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2} \\ (\textit{résultat symétrique en } m \textit{ et } n) \end{pmatrix}$$

Démonstration TH12 :

n et m étant positifs, on a d'après le TH11 :

$$\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{x+(kn)\bmod m}{m}\rfloor=d\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+\frac{(m-1)(n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}$$ résultat parfaitement symétrique en m et n

On peut donc échanger m et n dans la somme sans changer le résultat. cqfd

Test en J :

```
     Test12 =: 4 : 0
K=.i.m [ d=.m+.n [ 'm n'=.y
K=.i.n [ A=.+/<.(x+n*K)%m
B=.+/<.(x+m*K)%n
C=.(d*<.x%d)+-:((m-1)*(n-1))+d-1
A,B,C
)
```

```
   12.3 Test12 45 14
298 298 298
   35 Test12 12 42
258 258 258
   35 Test12 12 420
2334 2334 2334
  NB. Valeurs égales
```

TH13 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ n\in\mathbb{Z}\,;m\in\mathbb{N}^{\circ} \\ PGCD(m,n)=d \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{x\pm nk}{m}\rceil=d\lceil\frac{x}{d}\rceil+\frac{(m-1)(1\pm n)}{2}+\frac{1-d}{2}\right)$$

Démonstration TH13 :

On utilise le Th11 et la propriété (e) : $S=\sum_{k=0}^{m-1}\lfloor\frac{-x-nk}{m}\rfloor=d\lfloor\frac{-x}{m}\rfloor+\frac{(m-1)(-n-1)}{2}+\frac{d-1}{2}$

$S=-\sum_{k=0}^{m-1}\lceil\frac{x+nk}{m}\rceil=-d\lceil\frac{x}{d}\rceil-\frac{(m-1)(n+1)}{2}+\frac{d-1}{2}$ En changeant tout de signe : cqfd

De plus, n peut être affecté du signe - cqfd

Test en J :

```
    Test13 =: 4 : 0
K=.i.m [ d=.m+.n [ 'm n'=.y
A=.+/>.(x+n*K)%m
B=.(d*>.x%d)+-:((m-1)*(1+n))+1-d
C=.+/>.(x-n*K)%m
D=.(d*>.x%d)+-:((m-1)*(1-n))+1-d
2 2$A,B,C,D
)
   NB. Valeurs égales
```

```
   45 Test13 5 17
81 81
13 13
   456.78 Test13 5 _17
425 425
493 493
   _987.65 Test13 22 55
_396 _396
_1551 _1551
```

TH14 :

$$\begin{pmatrix} x\in\mathbb{R} \\ m,n\in\mathbb{N}^\circ \\ PGCD(m,n)=d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{x-nk}{m}\right\rceil=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lceil\frac{x-mk}{n}\right\rceil=d\left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil-\frac{(m-1)(n-1)}{2}-\frac{d-1}{2} \\ (\textit{résultat symétrique en m et n}) \end{pmatrix}$$

Démonstration TH14

On utilise le TH13 avec le signe – pour n :

$\sum_{k=0}^{m-1}\left\lceil\frac{x-nk}{m}\right\rceil=d\left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil-\frac{(m-1)(n-1)}{2}-\frac{d-1}{2}$ ce résultat étant symétrique en m et n, on peut permuter les rôles de m et n. cqfd

Test en J :

```
    Test14 =: 4 : 0
K=.i.m [ d=.m+.n [ 'm n'=.y
A=.+/>.(x-n*K)%m
K=.i.n
B=.+/>.(x-m*K)%n
C=.(d*>.x%d)--:((m-1)*(n-1))+d-1
A,B,C
)
  NB. Valeurs égales
```

```
   45 Test14 6 21
_6 _6 _6
   _45 Test14 6 21
_96 _96 _96
   _456.12 Test14 24 42
_930 _930 _930
   654.32 Test14 55 32
_182 _182 _182
```