POLYNÔMES ET CONSTANTES DE BERNOULLI ET D’EULER

R. Coquidé 16/05/2023

TABLE DES MATIÈRES

I) DÉFINITIONS (au moyen des fonctions génératrices exponentielles)

A) Polynômes et constantes de BERNOULLI

$B_n(x)$: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}}$	B_n : $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{e^t-1}}$	on a : $\boxed{B_n=B_n(0)}$

B) Polynômes et constantes d'EULER

$E_n(x)$: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{xt}}{e^t+1}}$	E_n : $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^t}{e^{2t}+1}}$	on a : $\boxed{E_n=2^n E_n(1/2)}$

II) PROPRIÉTÉS DES NOMBRES ET POLYNÔMES DE BERNOULLI

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\frac{(\frac{t}{2})Ch((x-\frac{1}{2})t)}{Sh(\frac{t}{2})}}$	$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(\frac{t}{2})Sh((x-\frac{1}{2})t)}{Sh(\frac{t}{2})}}$

Démonstrations :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}.\frac{e^{-t/2}}{e^{-t/2}}=\frac{t/2}{Sh(t/2)}e^{(x-1/2)t}=\frac{t/2}{Sh(t/2)}(Ch((x-1/2)t)+Sh((x-1/2)t))$$

et, en séparant fonctions paires et impaires de t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\frac{(\frac{t}{2})Ch((x-\frac{1}{2})t)}{Sh(\frac{t}{2})} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(\frac{t}{2})Sh((x-\frac{1}{2})t)}{Sh(\frac{t}{2})} \quad \text{cqfd}$$

$\boxed{B_0=1}$	$\boxed{B_1=\frac{-1}{2}}$	$\boxed{B_{2p+1}=0}$ si $p>0$	$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}2^{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}=\frac{t}{th(t)}}$

Démonstrations :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{e^t-1}=\frac{t}{t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}...}=\frac{1}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}...} \qquad \mathbf{t=0} \Rightarrow B_0=1 \quad \text{cqfd}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}...}-1=\frac{\frac{-1}{2}-\frac{t}{6}...}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}...} \ (n\neq 1) \qquad \mathbf{t=0} \Rightarrow B_1=\frac{-1}{2} \quad \text{cqfd}$$

$$-B_1 t+\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}=\frac{t}{2}+\frac{t}{e^t-1}=\frac{t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1}=\frac{t/2}{th(t/2)}$$ (ft paire) **t → 2t** ⇒

$$\sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}\cdot 2^{2p}\cdot\left(\frac{t^{2p}}{(2p)!}\right)=\frac{t}{th(t)}$$ et $B_{2p+1}=0$ cqfd

$\boxed{B_0(x)=1}$	$\boxed{B'_n(x)=n B_{n-1}(x)}$	$\boxed{B_n(x)}$ polynome de degré n	$\boxed{\int_y^{y+1} B_n(x)dx=y^n}$ pour n≥0

Démonstrations :

En partant de $\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}$ il vient pour t→ 0 :

$$B_0(x)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{(1-xt)\cdot e^{xt}}{e^t}\right)=1$$ cqfd En dérivant par rapport à x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B'_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t^2\cdot e^{xt}}{e^t-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B'_n(x)\frac{t^{n-1}}{n\cdot(n-1)!}=\frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}=B_n(x) \Rightarrow B'_n(x)=n.B_{n-1}(x)$$ cqfd $B_n(x)$ est une primitive de $B_{n-1}(x)$

$B_0(x)$ étant un polynôme de degré 0 , par induction $B_n(x)$ pol. de degré n cqfd

En intégrant par rapport à x :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_y^{y+1} B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{e^t-1}\int_y^{y+1} e^{xt}dx=e^{yt}=\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{t^n}{n!} \Rightarrow \int_y^{y+1} B_n(x)dx=y^n$$ cqfd

$\boxed{\int_0^1 B_n(x)dx=\begin{pmatrix}1 & n=0\\ 0 & sinon\end{pmatrix}}$	$\boxed{B_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k(y)x^{n-k}}$	$\boxed{B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}}$
$\boxed{B_n(x)=x^n-n\frac{x^{n-1}}{2}+\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} C_n^{2p}B_{2p}x^{n-2p}}$ où $\lfloor z\rfloor$ = entier maxi ≤ z		

Démonstrations :

On pose y=0 dans la dernière formule démontrée ⇒ cqfd

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+y)\frac{t^n}{n!}=\frac{t\cdot e^{(x+y)t}}{e^t-1}=e^{xt}\frac{t\,e^{yt}}{e^t-1}=\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\frac{t^j}{j!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(y)\frac{t^k}{k!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\right)B_k(y)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k(y)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}$$

$\Rightarrow\ B_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k(y)\,x^{n-k}$ cqfd En posant y=0 dans cette formule :

$\Rightarrow\ B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k\,x^{n-k}$ cqfd Puis en utilisant les valeurs des B_k :

$\Rightarrow\ B_n(x)=x^n-n\frac{x^{n-1}}{2}+\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} C_n^{2p} B_{2p}\,x^{n-2p}$ cqfd

$\boxed{B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)}$	$B_{2p}(x)$ **symétrie/droite x=1/2**	$B_{2p+1}(x)$ **symétrie/point x=1/2 y=0**
$\boxed{B_n(0)=B_n(1)=B_n}$ si n≠1	$\boxed{B_1(0)=-B_1(1)=B_1=-1/2}$	

Démonstrations :

$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=t\frac{e^{(1-x)t}}{e^t-1}=(-t)\frac{e^{x(-t)}}{e^{(-t)}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}$ ==> $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$ cqfd

si n=2p $B_{2p}(1-x)=B_{2p}(x)$ ⇒ cqfd si n =2p+1 $B_{2p+1}(1-x)=-B_{2p+1}(x)$ ⇒ cqfd

On pose x=0 ⇒ $B_n(1)=(-1)^n B_n(0)$ or $B_n=B_n(0)$ et $B_{2p+1}=0$ si p≠0 ⇒

$B_n(0)=B_n(1)=B_n$ si n≠1 et pour n=1 $B_1(0)=-B_1(1)=B_1=-1/2$ cqfd

$\boxed{B_n(\frac{1}{2})=-(1-\frac{1}{2^{n-1}})B_n}$	$\boxed{B_{2p}(\frac{1}{2})=-(1-\frac{1}{2^{2p-1}})B_{2p}}$	$\boxed{B_{2p+1}(\frac{1}{2})=0}$

Démonstrations :

$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\frac{1}{2})\frac{t^n}{n!}=\frac{t\,e^{t/2}}{e^t-1}=2\frac{(t/2)}{e^{(t/2)}-1}-\frac{t}{e^t-1}=2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{B_n}{2^n})\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{1}{2^{n-1}}-1)\frac{t^n}{n!}$

$\Rightarrow B_n(\frac{1}{2})=-(1-\frac{1}{2^{n-1}})B_n \Rightarrow\ B_{2p}(\frac{1}{2})=-(1-\frac{1}{2^{2p-1}})B_{2p}$ et $B_{2p+1}(\frac{1}{2})=0$ cqfd

$\boxed{B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}B_n(x+\frac{k}{m})}$	***m entier > 0***

Démonstration :

$\frac{e^{mt}-1}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{m-1}e^{kt}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{1}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{m-1}(\frac{e^{kt}}{e^{mt}-1})}$ ***m entier > 0***

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(mx)\frac{t^n}{n!}=t\frac{e^{mxt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{t\,e^{mxt}e^{kt}}{e^{mt}-1}\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{(mt)e^{(x+\frac{k}{m})(mt)}}{e^{(mt)}-1}\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(x+\frac{k}{m}\right)\frac{(mt)^n}{n!}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(mx)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x+\frac{k}{m}\right)\right)\frac{t^n}{n!} \Rightarrow B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x+\frac{k}{m}\right) \text{ cqfd}$$

$$\boxed{B_n=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k} \quad \boxed{B_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2k} B_{2k}} \text{ pour n>0}$$

Démonstration :

Dans $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$ avec x=1, $B_n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k=C_n^n B_n+C_n^{n-1} B_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k B_k \Rightarrow$

$B_{n-1}=\frac{-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k B_k$ n→ n+1 ⇒ $B_n=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k$ cqfd or $B_1=-1/2$, $B_{2p+1}=0$

$B_n=\frac{-1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 B_1+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k\right)$ n→ 2n ⇒ $B_{2n}=\frac{-1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^1 B_1+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2n-1}{2}\rfloor} C_{2n+1}^{2k} B_{2k}\right)$

$B_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2k} B_{2k}$ cqfd

Nombres de BERNOULLI	**Polynômes de BERNOULLI**
B_0 = 1	$B_0(x)$ = 1
B_1 = -1/2	$B_1(x)$ = (-1/2)+x
B_2 = 1/6	$B_2(x)$ = (1/6)-x+x^2
B_3 = 0	$B_3(x)$ = (1/2)x-(3/2)x^2+x^3
B_4 = -1/30	$B_4(x)$ = (-1/30)+x^2-2x^3+x^4
B_5 = 0	$B_5(x)$ = (1/6)x+(5/6)x^3-(5/2)x^4+x^5
B_6 = 1/42	$B_6(x)$ = (1/42)-(1/2)x^2+(5/2)x^4-3x^5+x^6
B_7 = 0	$B_7(x)$ = (1/6)x-(7/6)x^3+(7/2)x^5-(7/2)x^6+x^7
B_8 = -1/30	$B_8(x)$ = (-1/30)+(2/3)x^2-(7/3)x^4+(14/3)x^6-4x^7+x^8
B_9 = 0	$B_9(x)$ = (-3/10)x+2x^3-(21/5)x^5+6x^7-(9/2x^8)+x^9
B_{10} = 5/66	$B_{10}(x)$ = (5/66)-(3/2)x^2+5x^4-7x^6+(15/2)x^8-5x^9+x^{10}

Démonstration :

On utlise $B_0=1$, $B_1=\frac{-1}{2}$, $B_{2p+1}=0$ pour p>0, $B_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2k} B_{2k}$

$B_n(x)=x^n-n\frac{x^{n-1}}{2}+\sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2p} B_{2p} x^{n-2p}$, une pile de papiers, un bon stylo et … une bonne dose de patience (*comme Euler au 18e siècle*)!

A moins de disposer d'un ordinateur avec ***J*** (*ce qui est vivement conseillé*)!

$\boxed{\int_0^1 B_p(x)B_1(x)dx=\frac{B_{p+1}}{p+1}}$ p>1	$\boxed{\int_0^1 B_p(x)B_q(x)dx=(-1)^{q-1}C_{p+q}^q B_{p+q}}$ p et q>1	$\boxed{\int_0^1 B_1(x)^2dx=\frac{1}{12}}$

Démonstration :

$$\int_0^1 B_p(x)B_1(x)dx=\int_0^1 B_p(x)(x-\frac{1}{2})dx=[(x-\frac{1}{2})\frac{B_{p+1}(x)}{p+1}]_0^1-\frac{1}{p+1}\int_0^1 B_{p+1}(x)dx=\frac{B_{p+1}+B_{p+1}}{2(p+1)}$$

$$\int_0^1 B_p(x)B_1(x)dx=\frac{B_{p+1}}{p+1}$$ cqfd

$$\int_0^1 B_p(x)B_q(x)dx=\int_0^1 (\frac{B'_{p+1}}{p+1})B_q\,dx=[\frac{(B_{p+1}(x)B_q(x))}{p+1}]_0^1-\frac{1}{p+1}\int_0^1 B_{p+1}(x)B'_q(x)dx$$

$$\int_0^1 B_p(x)B_q(x)dx=(\frac{-q}{p+1})\int_0^1 B_{p+1}(x)B_{q-1}(x)dx=(\frac{-q}{p+1})(\frac{-(q-1)}{p+2})\int_0^1 B_{p+2}(x)B_{q-2}(x)dx=\ldots$$

$$=(\frac{-q}{p+1})(\frac{-(q-1)}{p+2})\ldots(\frac{-2}{p+q-1})\int_0^1 B_{p+q-1}(x)B_1(x)dx=\frac{(-1)^{q-1}q!\,p!}{(p+q)!}B_{p*q}=(-1)^{q-1}C_{p+q}^q B_{p*q}$$

cqfd

$$\int_0^1 B_1(x)^2dx=\int_0^1 (x-1/2)^2dx=[\frac{(x-1/2)^3}{3}]_0^1=\frac{1}{12}$$ cqfd

$$\boxed{\int_0^1 B_p(x)^2 dx = C_{2p}^p (-1)^{p-1} B_{2p} = C_{2p}^p |B_{2p}|}$$

B_{2p} du signe de $(-1)^{p-1}$ c'est-à-dire **$(-1)^{p-1}B_{2p} > 0$** ou **$(-1)^{p-1}B_{2p}=|B_{2p}|$**

Démonstration :

En posant p=q dans $\int_0^1 B_p(x) B_q(x) dx = (-1)^{q-1} C_{p+q}^q B_{p+q}$ on obtient :

$(-1)^{p-1} B_{2p} = \frac{1}{C_{2p}^p} \int_0^1 B_p(x)^2 dx > 0$ c.a.d. B_{2p} du signe de $(-1)^{p-1}$ cqfd

$$\boxed{B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}}$$

Démonstration :

$\int_y^{y+1} B_n(x) dx = y^n \Rightarrow x^n = \int_x^{x+1} B_n(z) dz = \left[\frac{B_{n+1}}{n+1}(z)\right]_x^{x+1} = \frac{(B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x))}{n+1}$ n→ n-1 ⇒

$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$ cqfd

III) PROPRIÉTÉS DES NOMBRES ET POLYNÔMES D'EULER

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\frac{Ch((x-\frac{1}{2})t)}{Ch(\frac{t}{2})}}$	$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{Sh((x-\frac{1}{2})t)}{Ch(\frac{t}{2})}}$

Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{xt}}{e^t+1}.\frac{e^{-t/2}}{e^{-t/2}}=\frac{e^{(x-1/2)}}{Ch(t/2)}=\frac{Ch((x-1/2)t)+Sh((x-1/2)t)}{Ch(t/2)}$$

et, en séparant fonctions paires et impaires de t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\frac{Ch((x-\frac{1}{2})t)}{Ch(\frac{t}{2})} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{Sh((x-\frac{1}{2})t)}{Ch(\frac{t}{2})} \quad \text{cqfd}$$

$\boxed{E_0=1}$ $\boxed{E_0(x)=1}$	$\boxed{E_{2p+1}=0}$	$\boxed{\frac{1}{ch(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} E_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}}$	$\boxed{E_n'(x)=nE_{n-1}(x)}$	**E_n(x) = polynôme de degré n**

Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{t/2}}{e^t+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{xt}}{e^t+1} \quad t=0 \Rightarrow \ E_0=1 \ \text{ et } \ E_0(x)=1 \quad \text{cqfd}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^t}{e^{2t}+1}=\frac{2}{e^t+e^{-t}}=\frac{1}{ch(t)} \quad \text{cqfd}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{xt}}{e^t+1} \ \text{d/dx} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E_n'(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t\cdot e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} nE_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!}$$

$\Rightarrow \ E_n'(x)=nE_{n-1}(x)$ cqfd $\boldsymbol{E}_0$(x) pol. de degré 0 ⇒ $\boldsymbol{E}_1$(x) pol. de degré 1, etc... cqfd

$\boxed{\int_0^1 E_n(x)=\frac{E_{n+1}(1)-E_{n+1}(0)}{n+1}}$	$\boxed{E_{2p}(1)=E_{2p}(0)}$	$\boxed{E_{2p-1}(1)-E_{2p-1}(0)=(\frac{2(2^{2p}-1)}{p})B_{2p}}$
$\boxed{\int_0^1 E_{2p}(x)dx=\frac{2(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}B_{2p+2}}$	$\boxed{\int_0^1 E_{2p+1}(x)dx=0}$	

Démonstrations :

$$\int_0^1 E_n(x)=\int_0^1 \frac{E'_{n+1}(x)}{n+1}dx=[\frac{E_{n+1}(x)}{n+1}]_0^1=\frac{E_{n+1}(1)-E_{n+1}(0)}{n+1}\quad \text{cqfd}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{xt}}{e^t+1}\ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^1 E_n(x)dx)\frac{t^n}{n!}=\frac{2}{e^t+1}\int_0^1 e^{xt}dx=\frac{2}{e^t+1}[\frac{e^t-1}{t}]=\frac{th(t/2)}{(t/2)}\ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^1 E_n(x)dx)\frac{t^n}{n!}=\sum_{p=0}^{\infty} B_{2p+2}[2.\frac{(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}]\frac{t^{2p}}{(2p)!}\ \Rightarrow\ \int_0^1 E_{2p}(x)dx=\frac{2(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}B_{2p+2}$$

et $\int_0^1 E_{2p+1}(x)dx=0$ cqfd $\Rightarrow$ $E_{2p+1}(1)-E_{2p+1}(0)=\frac{2(2^{2p+2}-1)}{(p+1)}B_{2p+2}$ p $\rightarrow$ p-1 $\Rightarrow$

$E_{2p-1}(1)-E_{2p-1}(0)=\frac{2(2^{2p}-1)}{p}B_{2p}$ cqfd et $E_{2p}(1)=E_{2p}(0)$ cqfd

$\boxed{E_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k 2^{-k}[x-\frac{1}{2}]^{n-k}}$	
$\boxed{E_{2n}(x)=\sum_{p=0}^{n} C_{2n}^{2p}E_{2p}2^{-2p}[x-\frac{1}{2}]^{2(n-p)}}$	$\boxed{E_{2n+1}(x)=\sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p}E_{2p}2^{-2p}[x-\frac{1}{2}]^{2(n-p)+1}}$
$\boxed{E_{2n}(1)=E_{2n}(0)=2^{-2n}\sum_{p=0}^{n} C_{2n}^{2p}E_{2p}=0}$	
$\boxed{E_{2n+1}(1)=-E_{2n+1}(0)=2^{-(2n+1)}\sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p}E_{2p}=\frac{B_{2n+2}}{n+1}(2^{2n+2}-1)}$	

Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2\cdot e^{xt}}{e^t+1}=\frac{e^{(x-1/2)t}}{ch(t/2)}=(\sum_{j=0}^{\infty}[x-1/2]^j\frac{t^j}{j!})(\sum_{k=0}^{\infty}E_k\frac{t^k}{2^k k!})=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{E_k}{2^k}[x-1/2]^{n-k})\frac{t^n}{n!}$$

$\Rightarrow$ $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k 2^{-k}[x-\frac{1}{2}]^{n-k}$ cqfd. Or $E_{2p+1}=0 \Rightarrow$ $E_n(x)=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2p}E_{2p}2^{-2p}[x-1/2]^{n-2p}$

si n$\rightarrow$2n $\Rightarrow$ $E_{2n}(x)=\sum_{p=0}^{n} C_{2n}^{2p} E_{2p}[x-1/2]^{2(n-k)}$ cqfd

si n$\rightarrow$2n+1 $\Rightarrow$ $E_{2n+1}(x)=\sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p} E_{2p}[x-1/2]^{2(n-k)+1}$ cqfd En posant x=0 il vient :

$E_{2n}(1)=E_{2n}(0)=2^{-2n}\sum_{p=0}^{n} C_{2n}^{2p} E_{2p}$ et $E_{2n+1}(1)=-E_{2n+1}(0)=2^{-(2n+1)}\sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p} E_{2p}$ cqfd

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\frac{Ch((x-\frac{1}{2})t)}{Ch(\frac{t}{2})} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(0)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(1)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=1$$

donc ***$E_{2n}(0)=E_{2n}(1)=0$*** si ***$n>0$*** cqfd

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{Sh((x-\frac{1}{2})t)}{Ch(\frac{t}{2})} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(1)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(0)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=Th(\frac{t}{2})=\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+2}\frac{2(2^{2n+2}-1)}{(n+1)}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\Rightarrow$ $E_{2n+1}(1)=-E_{2n+1}(0)=\frac{B_{2n+2}}{n+1}(2^{2n+2}-1)$ cqfd

$\boxed{E_0=1}$	$\boxed{E_{2p+1}=0}$	$\boxed{E_{2p}=-\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{2k} E_{2k}}$ si p>0	$\boxed{E_n(x)+E_n(x+1)=2x^n}$

Démonstrations : $E_0=1$ est déjà démontré.

$\frac{1}{ch(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} E_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}$ est une fonction paire $\Rightarrow$ $E_{2p+1}=0$ cqfd $1=ch(t).(\frac{1}{ch(t)})$

$$\Rightarrow 1=(\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{t^j}{(2j)!}))(\sum_{k=0}^{\infty} E_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!})=\sum_{p=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{p} E_{2k}\frac{(2p)!}{(2k)!(2p-2k)!})\frac{t^{2p}}{(2p)!} \Rightarrow$$

$$1=\sum_{p=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{p} C_{2p}^{2k} E_{2k})\frac{t^{2p}}{(2p)!} \Rightarrow 0=\sum_{p=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{p} C_{2p}^{2k} E_{2k})\frac{t^{2p}}{(2p)!} \Rightarrow 0=\sum_{p=1}^{p} C_{2p}^{2k} E_{2k} \Rightarrow$$

$E_{2p}=-\sum_{p=1}^{p-1} C_{2p}^{2k} E_{2k}$ cqfd

$$\sum_{n=0}^{\infty}(E_n(x)+E_n(x+1))=\frac{2e^{xt}}{e^t+1}+\frac{2e^{(x+1)t}}{e^t+1}=2e^{xt}=2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{t^n}{n!} \Rightarrow E_n(x)+E_n(x+1)=2x^n \text{ cqfd}$$

Nombres d'EULER	**Polynômes d'EULER**
E_0 = 1	$E_0(x) = 1$
E_1 = 0	$E_1(x) = (-1/2) + x$
E_2 = _1	$E_2(x) = x + x^2$
E_3 = 0	$E_3(x) = (1/4) - (3/2)x^2 + x^3$
E_4 = 5	$E_4(x) = x - 2x^3 + x^4$
E_5 = 0	$E_5(x) = -(1/2) + (5/2)x^2 - (5/2)x^4 + x^5$
E_6 = _61	$E_6(x) = -3x + 5x^3 - 3x^5 + x^6$
E_7 = 0	$E_7(x) = (17/8) - (21/2)x^2 + (35/4)x^4 - (7/2)x^6 + x^7$
E_8 = 1385	$E_8(x) = 17x - 28x^3 + 14x^5 - 4x^7 + x^8$
E_9 = 0	$E_9(x) = (-31/2) + (153/2)x^2 - 63x^4 + 21x^6 - (9/2)x^8 + x^9$
E_{10} = _50521	$E_{10}(x) = -155x + 255x^3 - 126x^5 + 30x^7 - 5x^9 + x^{10}$

Démonstration :

Comme EULER, on utilise $E_{2p} = -\sum_{p=1}^{p-1} C_{2p}^{2k} E_{2k}$, $E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k 2^{-k} [x - \frac{1}{2}]^{n-k}$,

$E_0 = 1$ et $E_0(x) = 1$

… et on s'arme de patience… comme EULER ...

... ou on utilise un ordinateur ! Cqfd

$$\boxed{\sum_{k=0}^{M} (-1)^{M-k} k^n = \frac{E_n(M+1) + (-1)^M E_n(0)}{2}}$$

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^{M} (-1)^{M-k} k^n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M} (-1)^{M-k} (E_n(k) + E_n(k+1)) = \frac{E_n(M+1) + (-1)^M E_n(0)}{2} \quad \text{cqfd}$$

$$\boxed{E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x)} \qquad \boxed{E_n(1)=(-1)^n E_n(0)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k} E_{2k}}$$

$$\boxed{E_n(1+x)=(-1)^n E_n(-x)}$$

$$\boxed{E_{2n}(1)-E_{2n}(0)=0} \qquad \boxed{E_{2n+1}(1)-E_{2n+1}(0)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k} E_{2k}}$$

Démonstrations :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2e^{(1-x)t}}{e^t+1}=\frac{2e^{x(-t)}}{e^{-t}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n(x)\frac{t^n}{n!} \;\Rightarrow\; E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x) \text{ cqfd}$$

$x \to 1+x \Rightarrow$ $E_n(1+x)=(-1)^n E_n(-x)$ cqfd et $x=0 \Rightarrow E_n(1)=(-1)^n E_n(0)$ or :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(1)\frac{t^n}{n!}=\frac{2e^t}{e^t+1}=\frac{e^{t/2}}{ch(t/2)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{2^j j!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}E_k\frac{t^k}{2^k k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{E_k}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\right\}\frac{t^n}{n!} \quad\Rightarrow$$

$$E_n(1)=(-1)^n E_n(0)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k} E_{2k}$$ (car $E_{2k+1}=0$) cqfd

$$E_n(1)-E_n(0)=(1+(-1)^{n+1})\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k=(1+(-1)^{n+1})\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k} E_{2k} \;\Rightarrow$$

$$E_{2n}(1)-E_{2n}(0)=0 \quad\text{et}\quad E_{2n+1}(1)-E_{2n+1}(0)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k} E_{2k} \quad\text{cqfd}$$

$$\boxed{E_n((2m+1)x)=(2m+1)^n\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{2m+1}\right)}$$ ***m entier ≥ 0***

$$\boxed{E_n(2mx)=\frac{2^{n+1}m^n}{(n+1)}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+1}B_{n+1}\left(x+\frac{k}{2m}\right)}$$ ***m entier > 0***

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-e^t)^k=\frac{(-e^t)^m-1}{(-e^t)-1}=\frac{(-1)^{m+1}e^{mt}+1}{e^t+1}$$

$\boldsymbol{m \to 2m+1} \Rightarrow$ $$\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k e^{kt}=\frac{-e^{2mt}+1}{e^t+1} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{1}{e^t+1}=\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k e^{kt}}{e^{(2m+1)t}+1}}$$ ***m entier ≥ 0*** (a)

$$m \to 2m \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{2m}(-1)^k e^{kt}=\frac{e^{(2m+1)t}+1}{e^t+1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{e^t+1}=\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^{k+1}e^{kt}}{e^{2mt}-1}}$$ *m entier > 0* (b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n((2m+1)x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2e^{(2m+1)xt}}{e^t+1}=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(\frac{2e^{(x+\frac{k}{2m+1})(2m+1)t}}{e^{(2m+1)t}+1})$$ (en utlisant (a))

$$=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x+\frac{k}{2m+1})(2m+1)^n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\{(2m+1)^n\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kE_n(x+\frac{k}{2m+1})\}\frac{t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow E_n((2m+1)x)=(2m+1)^n\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kE_n(x+\frac{k}{2m+1})$$ cqfd

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2mx)\frac{t^n}{n!}=\frac{2e^{2mxt}}{e^t+1}=\frac{1}{mt}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+1}(\frac{(2mt)e^{(x+\frac{k}{2m})(2mt)}}{e^{2mt}-1})$$ (en utlisant (b))

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(2mx)\frac{t^{n+1}}{n!}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x+\frac{k}{2m})(2m)^n\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}nE_{n-1}(2mx)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\{2^nm^{n-1}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+1}B_n(x+\frac{k}{2m})\}\frac{t^n}{n!}$$

$$nE_{n-1}(2mx)\frac{t^n}{n!}=2^nm^{n-1}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+1}B_n(x+\frac{k}{2m})$$ n → n+1 ⇒

$$E_n(2mx)=\frac{2^{n+1}m^n}{(n+1)}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+1}B_{n+1}(x+\frac{k}{2m})$$ cqfd

$\boxed{E_{n-1}(x)=\frac{2^n}{n}(B_n(\frac{x+1}{2})-B_n(\frac{x}{2}))}$ si $n \geq 1$	$\boxed{E_{n-1}(x)=\frac{2}{n}(B_n(x)-2^nB_n(\frac{x}{2}))}$ si $n \geq 1$

Démonstrations : $\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\frac{x+1}{2})\frac{t^n}{n!}=\frac{te^{(\frac{x+1}{2})t}}{e^t-1}-1$ et $\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\frac{x}{2})\frac{t^n}{n!}=\frac{te^{\frac{xt}{2}}}{e^t-1}-1$ ⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_n(\frac{x+1}{2})-B_n(\frac{x}{2}))\frac{t^n}{n!}=\frac{te^{(\frac{x+1}{2})t}}{e^t-1}-\frac{te^{\frac{xt}{2}}}{e^t-1}=\frac{te^{x\frac{t}{2}}}{e^t-1}(e^{\frac{t}{2}}-1)=\frac{t}{2}\frac{2e^{x(\frac{t}{2})}}{e^{(\frac{t}{2})}+1}=\frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(x)}{2^n}\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_n(\frac{x+1}{2})-B_n(\frac{x}{2}))\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2^n}E_{n-1}(x))\frac{t^n}{n!} \Rightarrow E_{n-1}(x)=\frac{2^n}{n}(B_n(\frac{x+1}{2})-B_n(\frac{x}{2}))$$ cqfd

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t\,e^{xt}}{e^t-1}-1 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n B_n(\frac{x}{2})\frac{t^n}{n!}=\frac{2\,t\,e^{xt}}{e^{2t}-1}-1 \;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B_n(x)-2^n B_n(\frac{x}{2}))\frac{t^n}{n!}=\frac{t\,e^{xt}}{e^t-1}-\frac{2\,t\,e^{xt}}{e^{2t}-1}=\frac{t}{2}(\frac{2\,e^{xt}}{e^t+1})=\frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2}E_{n-1}(x))\frac{t^n}{n!} \Rightarrow$$

$$E_{n-1}(x)=\frac{2}{n}(B_n(x)-2^n B_n(\frac{x}{2})) \text{ cqfd}$$

$\boxed{\int_0^1 E_n(x)E_m(x)dx=4(-1)^n C_{n+m}^n\frac{(2^{n+m+2}-1)}{(n+m+1)^2}B_{n+m+2}}$ (*=0 si n et m n'ont pas la même parité*)
$\boxed{\int_0^1 E_n(x)^2dx=4(-1)^n C_{2n}^n\frac{(2^{2n+2}-1)}{(2n+1)^2}B_{2n+2}}$

Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{u^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty} E_m(x)\frac{v^m}{m!}=\frac{2e^{xu}}{e^u+1}\frac{2e^{xv}}{e^v+1}=\frac{4}{(e^u+1)(e^v+1)}e^{x(u+v)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[\int_0^1 E_n(x)E_m(x)dx]\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}=\frac{4}{(e^u+1)(e^v+1)}\int_0^1 e^{x(u+v)}dx=\frac{4}{u+v}[\frac{e^{u+v}-1}{(e^u+1)(e^v+1)}]$$

$$=\frac{4}{u+v}[\frac{(e^u+1)(e^v+1)-2-e^u-e^v}{(e^u+1)(e^v+1)}]=\frac{2}{u+v}[2-\frac{2}{e^u+1}-\frac{2}{e^v+1}]=\frac{2}{u+v}[2-\sum_{k=0}^{\infty}E_k(0)(\frac{u^k+v^k}{k!})]$$

$$=-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_k(0)}{k!}[\frac{u^k+v^k}{u+v}]=-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k+1}(0)}{(2k+1)!}[\frac{u^{2k+1}+v^{2k+1}}{u+v}] \text{ car } E_{2k}(0)=0$$

$$=-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k+1}(0)}{(2k+1)!}[\sum_{n=0}^{2k}(-1)^n u^n v^{2k-n}]=-4\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[(-1)^n\frac{E_{n+m+1}(0)}{(n+m+1!)}n!\,m!]\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 E_n(x)E_m(x)dx=4(-1)^{n+1}\frac{E_{n+m+1}(0)}{(n+m+1)!}n!\,m!=4(-1)^n C_{n+m}^n\frac{(2^{n+m+2}-1)}{(n+m+1)^2}B_{n+m+2}$$

(car $E_{2k+1}(0)=-(2^{2k+2}-1)\frac{B_{2k+1}}{k+1}$) cqfd

Intégrale nulle si les parités de n et m sont différentes. Et si $n=m \Rightarrow$

$$\int_0^1 E_n(x)^2dx=4(-1)^n C_{2n}^n\frac{(2^{2n+2}-1)}{(2n+1)^2}B_{2n+2} \text{ cqfd}$$

IV) Applications des nombres et polynômes de BERNOULLI et EULER

A) Sommes de BERNOULLI

Définition :

Ce sont les sommes $\boxed{S_n(M)=\sum_{k=0}^{M} k^n}$ avec n entier ≥ 0 et M entier > 0

a) Formule utilisant les nombres et polynômes de BERNOULLI

$$\boxed{S_n(M)=\sum_{k=0}^{M} k^n=\frac{B_{n+1}(M+1)-B_{n+1}}{n+1}} \quad \text{Formule explicite}$$

Démonstration :

Dans $B_n(x+1)-B_n(x)=n x^{n-1}$ on fait n→ n+1 et x=k ⇒ $k^n=\frac{1}{n+1}(B_{n+1}(k+1)-B_{n+1}(k))$

$$S_n(M)=\sum_{k=0}^{M} k^n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{M}(B_{n+1}(k+1)-B_{n+1}(k))=\frac{B_{n+1}(M+1)-B_{n+1}(0)}{n+1}=\frac{B_{n+1}(M+1)-B_{n+1}}{n+1}$$

cqfd

En donnant à n les valeurs 0 1 2 … 10 nous obtenons (*péniblement!*):

	$S_n(M)=\sum_{k=0}^{M} k^n$
$S_1(M)$	$(1/2)(M^2 + M)$
$S_2(M)$	$(1/6)(2M^3 + 3M^2 + M)$
$S_3(M)$	$(1/4)(M^4 + 2M^3 + M^2)$
$S_4(M)$	$(1/30)(6M^5 + 15M^4 + 10M^3 - M)$
$S_5(M)$	$(1/12)(2M^6 + 6M^5 + 5M^4 - M^2)$
$S_6(M)$	$(1/42)(6M^7 + 21M^6 + 21M^5 - 7M^3 + M)$
$S_7(M)$	$(1/24)(3M^8 + 12M^7 + 14M^6 - 7M^4 + 2M^2)$
$S_8(M)$	$(1/90)(10M^9 + 45M^8 + 60M^7 - 42M^5 + 20M^3 - 3M)$
$S_9(M)$	$(1/20)(2M^{10} + 10M^9 + 15M^8 - 14M^6 + 10M^4 - 3M^2)$
$S_{10}(M)$	$(1/66)(6M^{11} + 33M^{10} + 55M^9 - 66M^7 + 66M^5 - 33M^3 + 5M)$

b) Méthode de PASCAL

PASCAL avait démontré (en 1655) une formule itérative :

$$\boxed{(n+1)S_n(M)=(M+1)^{n+1}-\sum_{p=0}^{n-1}C_{n+1}^{p}S_p(M)}$$

Démonstration :

Posons $A=\sum_{p=0}^{M}[(p+1)^{n+1}-p^{n+1}]$ que l'on calcule de 2 manières différentes :

$$A=\sum_{p=1}^{M+1}p^{n+1}-\sum_{p=0}^{M}p^{n+1}\Rightarrow A=(M+1)^{n+1}\ \textbf{(a)}$$ On a aussi :

$$A=\sum_{p=0}^{M}[\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}p^k-p^{n+1}]=\sum_{p=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}p^k=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}\sum_{p=0}^{M}p^k=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}S_k(M)\quad\Rightarrow$$

$$A=(n+1)S_n(M)+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^{k}S_k(M)\ \textbf{(b)}$$

(a,b) $\Rightarrow$ $$(n+1)S_n(M)=(M+1)^{n+1}-\sum_{p=0}^{n-1}C_{n+1}^{p}S_p(M)$$ cqfd

On peut ainsi retrouver les 10 formules précédentes mais il faut pour calculer la 10^{e} avoir déjà calculé les 9 premières.
Cette formule « de **PASCAL** » prouve aussi que si $S_p(M)=x.U_p(x)$ où $U_p(x)$ est un polynôme de degré p de la variable $x=M+1$ pour $0\le p\le n-1$ il en est de même de $S_n(M)$.
Or $S_0(M)=M+1=x.$ Par induction, $S_n(M)=x.U_n(x)$ (pol. de degré n) pour tout $n\geq 0.$
On peut donc affirmer :

En posant $\boxed{x=M+1}$ $\boxed{S_n(M)=\sum_{k=0}^{M}k^n=xU_n(x)}$ où $U_n(x)$ est un polynôme de degré n de

la variable x vérifiant : $\boxed{(n+1)U_n(x)=x^n-\sum_{p=0}^{n-1}C_{n+1}^{p}U_p(x)}$ pour $n\geq 0$ cqfd $\Leftarrow\Rightarrow$

$\boxed{\sum_{p=0}^{n}C_{n+1}^{p}U_p(x)=x^n}$ $\boxed{S_n(M)=xU_n(x)}$ $\boxed{x=M+1}$

qui peut s'écrire sous forme matricielle :

(ex. pour n=6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0(x) \\ U_1(x) \\ U_2(x) \\ U_3(x) \\ U_4(x) \\ U_5(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_0(x) \\ U_1(x) \\ U_2(x) \\ U_3(x) \\ U_4(x) \\ U_5(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/30 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/12 & 0 & 5/12 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$U_0(x)=1$
$U_1(x)=(1/2)(x-1)$
$U_2(x)=(1/6)(2x^2-3x+1)$
$U_3(x)=(1/4)(x^3-2x^2+x)$
$U_4(x)=(1/30)(6x^4-15x^3+10x^2-1)$
$U_5(x)=(1/12)(2x^5-6x^4+5x^3-x)$

On en déduit

avec $x=(M+1)$ et $S_n(M)=\sum_{k=0}^{M} k^n = xU_n(x)$
$S_0(M)=x$
$S_1(M)=(1/2)(x^2-x)$
$S_2(M)=(1/6)(2x^3-3x^2+x)$
$S_3(M)=(1/4)(x^4-2x^3+x^2)$
$S_4(M)=(1/30)(6x^5-15x^4+10x^3-x)$
$S_5(M)=(1/12)(2x^6+6x^5-5x^4-x^2)$

c) Méthode de FAULHABER

En posant $\boxed{y=\frac{M(M+1)}{2}}$ $R_p(y)$ et $T_p(y)$ polynômes de degré p de la variable y

$\boxed{S_{2p-1}(M)=R_p(y)}$ où $\boxed{R_p(y)=\frac{2^{p-1}}{p}y^p-\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{\lfloor (p-1)/2\rfloor} C_p^{2q+1}R_{p-q}(y)}$

et

$\boxed{S_{2p}(M)=(2M+1)T_p(y)}$ où $\boxed{T_p(y)=2^{p-1}y^p-\sum_{q=1}^{\lfloor p/2\rfloor}(2C_p^{2q+1}+C_p^{2q})T_{p-q}(y)}$

Démonstrations :

On calcule de 2 manières $A=\sum_{k=1}^{M}\{k^p(k+1)^p-(k-1)^p k^p\}$ dont les termes s'annulent 2

par 2 : $A=M^p(M+1)^p$ (α) Puis avec le triangle de **PASCAL** :

$$A=\sum_{k=1}^{M}k^p\sum_{q=0}^{p}C_p^q[k^{p-q}-(-1)^q k^{p-q}]=\sum_{k=1}^{M}\sum_{q=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}2C_p^{2q+1}k^{2p-2q-1}=2\sum_{q=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}C_p^{2q+1}S_{2p-2q-1}(M)\quad(\beta)$$

(α,β) $\Rightarrow 2\sum_{q=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}C_p^{2q+1}S_{2(p-q)-1}(M)=M^p(M+1)^p \Rightarrow$

$$2pS_{2p-1}(M)=2^p y^p-2\sum_{q=1}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}C_p^{2q+1}S_{2(p-q)-1}(M)$$

$$S_{2p-1}(M)=\frac{2^{p-1}}{p}y^p-\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}C_p^{2q+1}S_{2(p-q)-1}(M)$$

Cette formule exprime que si ($S_{2q-1}(M)$ pour $1\leq q<p$) sont des polynômes de degré q de la variable $y=M(M+1)/2$ il en est de même de $S_{2p-1}(M)$.
Or pour $p=1$ on a $S_1(M)=M(M+1)/2=y$. Donc, par induction, c'est vrai pour tout $q\geq 1$.
Par suite :

$S_{2p-1}(M)=R_p(y)$ où $R_p(y)=\frac{2^{p-1}}{p}y^p-\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{\lfloor (p-1)/2\rfloor}C_p^{2q+1}R_{p-q}(y)$ cqfd $\Longleftrightarrow$

$\sum_{q=0}^{\lfloor (p-1)/2\rfloor}C_p^{2q+1}R_{p-q}(y)=2^{p-1}y^p$ ce qui peut s'écrire matriciellement :

(ex. pour p=5)

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&1&3&0&0\\0&0&4&4&0\\0&0&1&10&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_1(y)\\R_2(y)\\R_3(y)\\R_4(y)\\R_5(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^0y^1\\2^1y^2\\2^2y^3\\2^3y^4\\2^4y^5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}R_1(y)\\R_2(y)\\R_3(y)\\R_4(y)\\R_5(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1/2&0&0&0\\0&-1/6&1/3&0&0\\0&1/6&-1/3&1/4&0\\0&-3/10&3/5&-1/2&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^0y^1\\2^1y^2\\2^2y^3\\2^3y^4\\2^4y^5\end{pmatrix}\Longleftrightarrow$$

$R_1(y)=y$
$R_2(y)=y^2$
$R_3(y)=(1/3)(4y^3-y^2)$
$R_4(y)=(1/3)(6y^4-4y^3+y^2)$
$R_5(y)=(1/5)(16y^5-20y^4+12y^3-3y^2)$

De même, calculons $A=\sum_{k=1}^{M}\{(2k+1)k^p(k+1)^p-(2k-1)(k-1)^p k^p\}$ de 2 manières :

$A=(2M+1)M^p(M+1)^p$ (α) Évident car les termes s'annulent 2 à 2.

Puis avec le triangle de **PASCAL** :

$$A=\sum_{k=1}^{M}\{(2k^{p+1}+k^p)\sum_{q=0}^{p}C_p^q k^{p-q}-(2k^{p+1}-k^p)\sum_{q=0}^{p}C_p^q(-1)^q k^{p-q}\}$$

$$A=\sum_{k=1}^{M}\sum_{q=0}^{p}C_p^q\{2[k^{2p-q+1}-(-1)^q k^{2p-q+1}]+[k^{2p-q}+(-1)^q k^{2p-q}]\}$$

$$A=\sum_{k=1}^{M}\sum_{q=0}^{\lfloor p/2\rfloor}\{4C_p^{2q+1}k^{2p-2q}+2C_p^{2q}k^{2p-2q}\}\ \Rightarrow\ A=\sum_{q=0}^{\lfloor p/2\rfloor}\{4C_p^{2q+1}+2C_p^{2q}\}S_{2(p-q)}(M)\ \text{(β)}$$

(α,β) ⇒ $\sum_{q=0}^{\lfloor p/2\rfloor}\{4C_p^{2q+1}+2C_p^{2q}\}S_{2(p-q)}(M)=(2M+1)M^p(M+1)^p$

$$(4p+2)S_{2p}(M)=(2M+1)2^p y^p-\sum_{q=1}^{\lfloor p/2\rfloor}\{4C_p^{2q+1}+2C_p^{2q}\}S_{2(p-q)}(M)$$

$$S_{2p}(M)=\frac{(2M+1)2^{p-1}y^p}{(2p+1)}-\frac{1}{(2p+1)}\sum_{q=1}^{\lfloor p/2\rfloor}\{2C_p^{2q+1}+C_p^{2q}\}S_{2(p-q)}(M)$$

cette formule exprime (en posant ***$y=M(M+1)/2$***) que si ***$S_{2q}(M)=(2M+1).T_q(y)$*** où ***$T_{q-1}(y)$*** est un polynôme de degré ***q*** de la variable ***$y=M(M+1)/2$***, c'est encore vrai pour ***$S_{2p}(M)$***.

Or pour $p=1$ on a $S_2(M)=(2M+1)M(M+1)/6=(2M+1)y/3.$ Donc, par induction, c'est vrai pour tout $p\geq 1.$

Par suite : $S_{2p}(M)=(2M+1)T_p(y)$ où $T_p(y)$ est un polynôme de degré p de la variable $y=M(M+1)/2$ vérifiant $T_p(y)=\frac{2^{p-1}y^p}{(2p+1)}-\frac{1}{(2p+1)}\sum_{q=1}^{\lfloor (p+1)/2\rfloor}(2C_p^{2q+1}+C_p^{2q})T_{p-q}(y)$ pour $p\geq 1$

cqfd $\Longleftrightarrow \boxed{\sum_{q=0}^{\lfloor (p+1)/2\rfloor}(2C_p^{2q+1}+C_p^{2q})T_{p-q}(y)=2^{p-1}y^p}$ qui peut s'écrire matriciellement :

(ex. pour p=5)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 14 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 30 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1(y)\\ T_2(y)\\ T_3(y)\\ T_4(y)\\ T_5(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^0y^1\\ 2^1y^2\\ 2^2y^3\\ 2^3y^4\\ 2^4y^5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_1(y)\\ T_2(y)\\ T_3(y)\\ T_4(y)\\ T_5(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1/15 & 1/5 & 0 & 0 & 0\\ 1/21 & -1/7 & 1/7 & 0 & 0\\ -1/15 & 1/5 & -2/9 & 1/9 & 0\\ 5/33 & -5/11 & 17/33 & -10/33 & 1/11\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^0y^1\\ 2^1y^2\\ 2^2y^3\\ 2^3y^4\\ 2^4y^5\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$T_1(y)=(1/3)y$
$T_2(y)=(1/15)(6y^2-y)$
$T_3(y)=(1/21)(12y^3-6y^2+y)$
$T_4(y)=(1/45)(40y^4-40y^3+18y^2-3y)$
$T_5(y)=(1/33)(48y^5-80y^4+68y^3-30y^2+5y)$

En utilisant $y=M(M+1)/2$ ainsi que

$S_{2p}(M)=(2M+1)T_p(y)$ et $S_{2p-1}(M)=R_p(y)$

on obtient :

$$\boxed{y=\frac{M(M+1)}{2}}$$

$$\boxed{S_n(M)=\sum_{k=1}^{M} k^n}$$

$$\boxed{S_{2p-1}(M)=R_p(y)}$$

$$\boxed{S_{2p}(M)=(2M+1)T_p(y)}$$

$\boxed{S_1(M)=y}$	$\boxed{S_2(M)=(2M+1)\frac{y}{3}}$
$\boxed{S_3(M)=y^2}$	$\boxed{S_4(M)=(2M+1)\frac{6y^2-y}{15}}$
$\boxed{S_5(M)=\frac{4y^3-y^2}{3}}$	$\boxed{S_6(M)=(2M+1)\frac{12y^3-6y^2+y}{21}}$
$\boxed{S_7(M)=\frac{6y^4-4y^3+y^2}{3}}$	$\boxed{S_8(M)=(2M+1)\frac{40y^4-40y^3+18y^2-3y}{45}}$
$\boxed{S_9(M)=\frac{16y^5-20y^4+12y^3-3y^2}{5}}$	$\boxed{S_{10}(M)=(2M+1)\frac{48y^5-80y^4+68y^3-30y^2+5y}{33}}$

B) Sommes d'EULER

Ce sont les sommes $\boxed{s_n(M)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^{M-k}k^n}$

$\boxed{s_n(M)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^{M-k}k^n=\frac{1}{2}[E_n(x)+(-1)^M E_n(0)]}$ *n et M entiers > 0* *x=M+1*		
M pair	***n***	***M impair***
$(1/2)[-1+x]$	1	$(1/2)[x]$
$(1/2)[-x+x^2]$	2	$(1/2)[-1+x]$
$(1/2)[(1/2)-(3/2)x^2+x^3]$	3	$(1/2)[-(3/2)x^2+x^3]$
$(1/2)[x-2x^3+x^4]$	4	$(1/2)[x-2x^3+x^4]$
$(1/2)[-1+(5/2)x^2-(5/2)x^4+x^5]$	5	$(1/2)[(5/2)x^2-(5/2)x^4+x^5]$
$(1/2)[-3x+5x^3-3x^5+x^6]$	6	$(1/2)[-3x+5x^3-3x^5+x^6]$
$(1/2)[(17/4)-(21/2)x^2+(35/4)x^4-(7/2)x^6+x^7]$	7	$(1/2)[-(21/2)x^2+(35/4)x^4-(7/2)x^6+x^7]$
$(1/2)[17x-28x^3+14x^5-4x^7+x^8]$	8	$(1/2)[17x-28x^3+14x^5-4x^7+x^8]$
$(1/2)[-31+(153/2)x^2-63x^4+21x^6-(9/2)x^8+x^9]$	9	$(1/2)[(153/2)x^2-63x^4+21x^6-(9/2)x^8+x^9]$
$(1/2)[-155x+255x^3-126x^5+30x^7-5x^9+x^{10}]$	10	$(1/2)[-155x+255x^3-126x^5+30x^7-5x^9+x^{10}]$

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^{M}(-1)^{M-k}k^n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M}(-1)^{M-k}(E_n(k)+E_n(k+1))=\frac{E_n(M+1)+(-1)^M E_n(0)}{2}$$ cqfd

$$\sum_{k=0}^{M}(-1)^{M-k}k^n=\frac{E_n(x)+(-1)^M E_n(0)}{2}$$ avec $x=M+1$ cqfd

C) Développement en séries de MAC-LAURIN de fonctions trigonométriques et hyperboliques.

Développement	Rayon de convergence
$\frac{t}{th(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} B_{2p} 2^{2p} \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π
$\frac{t}{tg(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p B_{2p} 2^{2p} \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π
$\frac{1}{ch(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} E_{2p} \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\frac{1}{\cos(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p E_{2p} \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\frac{t}{sh(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}(2-2^{2p}) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π
$\frac{t}{\sin(t)}=\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p B_{2p}(2-2^{2p}) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π
$t.th(t)=\sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} 2^{2p}(2^{2p}-1) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$t.tg(t)=\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p} 2^{2p}(2^{2p}-1) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\frac{th(t)}{t}=\sum_{p=0}^{\infty} B_{2p+2}\left(\frac{2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\frac{tg(t)}{t}=\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p B_{2p+2}\left(\frac{2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\ln(ch(t))=\sum_{p=1}^{\infty} B_{2p}\left(\frac{2^{2p-1}(2^{2p}-1)}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\ln(\cos(t))=\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p}\left(\frac{2^{2p-1}(2^{2p}-1)}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\ln\left(\frac{sh(t)}{t}\right)=\sum_{p=1}^{\infty} B_{2p}\left(\frac{2^{2p-1}}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π
$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)=\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p}\left(\frac{2^{2p-1}}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π
$\ln\left(\frac{th(t)}{t}\right)=\sum_{p=1}^{\infty} B_{2p}\left(\frac{2^{2p-1}(2-2^{2p})}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2
$\ln\left(\frac{tg(t)}{t}\right)=\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p}\left(\frac{2^{2p-1}(2-2^{2p})}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!}$	π/2

Démonstrations :
Le rayon de convergence est le plus petit module des pôles de la fonction.
Si t → i.t ⇒ cos(t) ↔ ch(t) , sin(t) → i.sh(t) , sh(t) → i.sin(t)
tg(t) → i.th(t) , th(t) → i.tg(t)
cela permet de passer d'une formule trigonométrique à une formule hyperbolique et réciproquement.
Le développement de t/th(t) a déjà été démontré.
Celui de t/tg(t) est obtenu par t→ i.t cqfd

$$\frac{1}{th(t/2)}-\frac{1}{th(t)}=\frac{ch(t/2)}{sh(t/2)}-\frac{ch(t)}{sh(t)}=\frac{sh(t)ch(t/2)-sh(t/2)ch(t)}{sh(t)sh(t/2)}=\frac{sh(t/2)}{sh(t)sh(t/2)}=\frac{1}{sh(t)}$$

$$\frac{t}{sh(t)}=2\frac{(t/2)}{th(t/2)}-\frac{t}{th(t)}=\sum_{p=0}^{\infty}2B_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}-\sum_{p=0}^{\infty}2^{2p}B_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}=\sum_{p=0}^{\infty}(2-2^{2p})B_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}\ \text{cqfd}$$

t→ i.t ⇒ $\frac{t}{\sin(t)}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^pB_{2p}(2-2^{2p})\frac{t^{2p}}{(2p)!}$ cqfd

$\frac{1}{ch(t)}=\sum_{p=0}^{\infty}E_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}$ (déjà démontré) t→ i.t ⇒ $\frac{1}{\cos(t)}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^pE_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}$ cqfd

$$\frac{2}{th(2t)}-\frac{1}{th(t)}=\frac{2ch(2t)}{sh(2t)}-\frac{ch(t)}{sh(t)}=\frac{ch(2t)}{sh(t)ch(t)}-\frac{ch(t)}{sh(t)}=\frac{(ch(t)^2+sh(t)^2-ch(t)^2)}{sh(t)ch(t)}=th(t)\ \Rightarrow$$

$$t.th(t)=\frac{(2t)}{th(2t)}-\frac{t}{th(t)}=\sum_{p=0}^{\infty}B_{2p}4^{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}-\sum_{p=0}^{\infty}B_{2p}2^{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}=\sum_{p=0}^{\infty}B_{2p}2^{2p}(2^{2p}-1)\frac{t^{2p}}{(2p)!}\ \text{cqfd}$$

t → i.t ⇒ $t.tg(t)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^pB_{2p}2^{2p}(2^{2p}-1)\frac{t^{2p}}{(2p)!}$ cqfd

$$\frac{th(t)}{t}=\frac{t.th(t)}{t^2}=\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}2^{2p}(2^{2p}-1)\frac{t^{2p-2}}{(2p)!}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{B_{2p+2}2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}.\frac{t^{2p}}{(2p)!}\ \text{cqfd}$$

t → i.t ⇒ $\frac{tg(t)}{t}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{B_{2p+2}2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{(p+1)(2p+1)}.\frac{t^{2p}}{(2p)!}$ cqfd

$$t.th(t)=\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}2^{2p}(2^{2p}-1)\frac{t^{2p}}{(2p)!}\ \Rightarrow\ th(t)=\frac{sh(t)}{ch(t)}=\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}2^{2p}(2^{2p}-1)\frac{t^{2p-1}}{(2p)!}$$

$$\int_0^t(\frac{sh(t)}{ch(t)})dt=\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}2^{2p}(2^{2p}-1)\frac{t^{2p}}{(2p)(2p)!}\ \Rightarrow\ \ln(ch(t))=\sum_{p=1}^{\infty}B_{2p}(\frac{2^{2p-1}(2^{2p}-1)}{p})\frac{t^{2p}}{(2p)!}$$

cqfd

$$t \to i.t \Rightarrow \ln(\cos(t)) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}(2^{2p}-1)}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{cqfd}$$

$$\frac{t}{th(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} B_{2p} 2^{2p} \frac{t^{2p}}{(2p)!} \Rightarrow \frac{1}{th(t)} - \frac{B_0}{t} = \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} 2^{2p} \frac{t^{2p-1}}{(2p)!} \Rightarrow$$

$$\int_0^t \left(\frac{ch(t)}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right) dt = \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} 2^{2p} \frac{t^{2p}}{(2p)(2p)!} \Rightarrow \ln\left(\frac{sh(t)}{t}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{cqfd}$$

$$t \to i.t \Rightarrow \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{cqfd}$$

$$\ln\left(\frac{th(t)}{t}\right) = \ln\left(\frac{sh(t)}{t}\right) - \ln\left(\frac{1}{ch(t)}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}(2^{2p}-1)}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{th(t)}{t}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}(2-2^{2p})}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{cqfd}$$

$$t \to i.t \Rightarrow \ln\left(\frac{tg(t)}{t}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p} \left(\frac{2^{2p-1}(2-2^{2p})}{p}\right) \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{cqfd}$$

V) Autres propriétés des nombres et polynômes de BERNOULLI et EULER

$$\boxed{B_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)=-\left(\frac{a-1}{2a}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}C_{2n}^{2k}\left[1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right]\left(\frac{2a}{a-1}\right)^{2k}B_{2k}}\quad \textbf{(α)}$$

($\boldsymbol{a}$ réel ≠ 0 et 1)

$$\boxed{B_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)=\left(\frac{a-1}{2a}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}C_{2n+1}^{2k}\left[1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right]\left(\frac{2a}{a-1}\right)^{2k}B_{2k}}\quad \textbf{(β)}$$

Démonstration :

Dans $\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}$ on fait x=1/2a et t→ i2at (a réel ≠ 0 et 1) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(i2at)^n}{n!}=\frac{(i2at)e^{i.t}}{e^{i2at}-1}=\frac{(at)e^{-iat}}{\left(\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right)}e^{i.t}=(at)\left(\frac{(\cos(at)-i.\sin(at))}{\sin(at)}\right)e^{i.t}$$

$$=(at)\left(\frac{1}{tg(at)}-i\right)(\cos(t)+i.\sin(t))=(at)\left(\left(\frac{\cos(t)}{tg(at)}+\sin(t)\right)+i.\left(\frac{\sin(t)}{tg(at)}-\cos(t)\right)\right)\quad \text{or}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(i2at)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n}}{(2n)!}+i.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

enfin, en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$(at)\left(\frac{\cos(t)}{tg(at)}+\sin(t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n}}{(2n)!}\quad \text{(a1)}\qquad \text{et}$$

$$(at)\left(\frac{\sin(t)}{tg(at)}-\cos(t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \text{(b1)}$$

(a1) ⇒ $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n}}{(2n)!}=(at)\left(\frac{\cos(t)}{tg(at)}+\sin(t)\right)=(at)\left(\frac{\cos(at)\cos(t)+\sin(at)\sin(t)}{\sin(at)}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n}}{(2n)!}=\left(\frac{at}{\sin(at)}\right)\cos((a-1)t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n}}{(2n)!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kB_{2k}[2-2^{2k}]a^{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(a-1)^{2j}\frac{t^{2j}}{(2j)!}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n B_{2k}[2-2^{2k}]a^{2k}(a-1)^{2n-2k}\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\right)\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow\ B_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)(2a)^{2n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2n}^{2k}B_{2k}[2-2^{2k}]a^{2k}(a-1)^{2n-2k}$$

$$B_{2n}\left(\frac{1}{2a}\right)=-\left(\frac{a-1}{2a}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}C_{2n}^{2k}\left[1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right]\left(\frac{2a}{a-1}\right)^{2k}B_{2k}\quad \text{cqfd}$$

(b1) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n+1}}{(2n+1)!}=(at)\left(\frac{\sin(t)}{tg(at)}-\cos(t)\right)=(at)\left(\frac{\sin(t)\cos(at)-\sin(at)\cos(t)}{\sin(at)}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\left(\frac{at}{\sin(at)}\right)\sin((a-1)t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)\frac{(2at)^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_{2k}[2-2^{2k}]a^{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(a-1)^{2j+1}\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n B_{2k}[2-2^{2k}]a^{2k}\frac{(2n+1)!}{(2k)!(2n-2j+1)}(a-1)^{2n-2k+1}\right)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \Rightarrow$$

$$B_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)(2a)^{2n+1}=-\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}[2-2^{2k}]a^{2k}C_{2n+1}^{2k}(a-1)^{2n-2k+1}$$

$$B_{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)=\left(\frac{a-1}{2a}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}C_{2n+1}^{2k}\left[1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right]\left(\frac{2a}{a-1}\right)^{2k}B_{2k}\quad \text{cqfd}$$

$$\boxed{B_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}2^{2k}(2^{2k}-2)B_{2k}=-\left(\frac{2^{2n}-2}{4^{2n}}\right)B_{2n}=\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{B_{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{2k}(2^{2k}-2)B_{2k}=-\left(\frac{2n+1}{4^{2n+1}}\right)E_{2n}}$$

Démonstration : on pose **a=2** $\Rightarrow$

(a1) $\Rightarrow$ $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{(4t)^{2n}}{(2n)!}=(2t)\left(\frac{\cos(t)}{tg(2t)}+\sin(t)\right)=(2t)\left(\frac{\cos(2t)\cos(t)+\sin(2t)\sin(t)}{\sin(2t)}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n}(\frac{1}{4})4^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}=(2t)(\frac{\cos(t)}{2\sin(t)\cos(t)})=\frac{t}{\sin(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n}(2-2^{2n})\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$\Rightarrow (-1)^n B_{2n}(\frac{1}{4})4^{2n}=(-1)^n B_{2n}[2-2^{2n}] \Rightarrow B_{2n}(\frac{1}{4})=-B_{2n}\frac{[2^{2n}-2]}{4^{2n}}$ cqfd car

$$B_{2n}(\frac{1}{2})=-(1-\frac{1}{2^{2n-1}})B_{2n}$$

(b1) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{4})\frac{(4t)^{2n+1}}{(2n+1)!}=(2t)(\frac{\sin(t)}{tg(2t)}-\cos(t))=(2t)(\frac{\sin(t)\cos(2t)-\sin(2t)\cos(t)}{\sin(2t)})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{4})\frac{(4t)^{2n+1}}{(2n+1)!}=(2t)(\frac{-\sin(t)}{2\sin(t)\cos(t)})=\frac{-t}{\cos(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}E_{2n}\frac{t^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{4})4^{2n+1}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n+1)E_{2n}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$(-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{4})4^{2n+1}=(-1)^{n+1}(2n+1)E_{2n} \Rightarrow B_{2n+1}(\frac{1}{4})=-(\frac{2n+1}{4^{2n+1}})E_{2n}$ cqfd

$\boxed{\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\le\lvert B_{2n}\rvert\le(\frac{2n}{2n-1})\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}}$	$\boxed{\lvert B_{2n}\rvert\sim 4(\frac{n}{\pi e})^{2n}\sqrt{n\pi}}$ si $n\sim\infty$

Démonstration :

$1\le\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^{2n}})\le 1+\int_1^{\infty}(\frac{1}{t^{2n}})dt=1+[\frac{-1}{(2n-1)t^{2n-1}}]_1^{\infty}=1+\frac{1}{2n-1}=\frac{2n}{2n-1} \Rightarrow 1\le\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^{2n}})\le\frac{2n}{2n-1}$

$1\le\lvert B_{2n}\rvert\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\le\frac{2n}{2n-1} \Rightarrow \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\le\lvert B_{2n}\rvert\le(\frac{2n}{2n-1})\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$ cqfd

quand n$\rightarrow\infty$ $\lvert B_{2n}\rvert\sim\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$ avec la formule de **STIRLING**

$(2n)!\sim(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{4\pi n} \Rightarrow \lvert B_{2n}\rvert\sim 4(\frac{n}{\pi e})^{2n}\sqrt{n\pi}$ cqfd

$$\boxed{MAX(|B_{2n}(x)|)=|B_{2n}|\leq\frac{(2n)}{(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}} \text{ si } x \text{ dans } [0,1]$$

Démonstration :

$B'_{2n}(x)=2nB_{2n-1}(x)$ et $B_{2n-1}(0)=B_{2n-1}(1)=B_{2n-1}(1/2)=0$ avec

$B_{2n}(0)=B_{2n}(1)=B_{2n}$, $B_{2n}(\frac{1}{2})=-(1-\frac{1}{2^{2n-1}})B_{2n} \Rightarrow MAX(|B_{2n}(x)|)=|B_{2n}|$

or $|B_{2n}|\leq(\frac{2n}{2n-1})\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \Rightarrow MAX(|B_{2n}(x)|)=|B_{2n}|\leq\frac{(2n)}{(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$ cqfd

VI) Séries de FOURIER des polynômes de BERNOULLI et EULER

$$\boxed{B_{2n}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2p\pi x)}{p^{2n}}\right)} \quad 0\le x\le 1$$

$$\boxed{B_{2n+1}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{2n}\pi^{2n+1}}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2p\pi x)}{p^{2n+1}}\right)} \quad 0\le x\le 1 \text{ si } n>0, \quad 0<x<1 \text{ si } n=0$$

Démonstration :
Les fonctions $B_n(x)$ sont continues à dérivées continues et $B_n(0)=B_n(1)$ si n≠1. Donc elles sont égales à leur série de FOURIER pour $0\le x\le 1$ (période T=1, w=2π) si n≠1.
De plus $\int_0^1 B_n(x)dx=0$ si n>0 ⇒ les termes constants sont nuls.
Posons donc : $B_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_p^{(n)}\cdot\cos(2p\pi x)+b_p^{(n)}\cdot\sin(2p\pi x)$ période **T=1**, $0\le x\le 1$, **n > 1**

avec $a_p^{(n)}+i\cdot b_p^{(n)}=2\int_0^1 B_n(x)\cdot e^{i2p\pi x}dx$ De plus on a $t\frac{e^{xt}}{e^t-1}e^{i2p\pi x}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)e^{i2p\pi x}\frac{t^n}{n!}$ ⇒

$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)\int_0^1 e^{xt}e^{i2p\pi x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 B_n(x)e^{i2p\pi x}dx\right)\frac{t^n}{n!}$ (0 pour n=0) ⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_p^{(n)}+i\,b_p^{(n)}}{2}\right)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{t}{e^t-1}\right)\left[\frac{e^{xt}e^{i2p\pi x}}{t+i2p\pi}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{t}{t+i2p\pi}=\frac{(t/i2p\pi)}{1+(t/i2p\pi)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{(i2p\pi)^n} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_p^{(n)}+i.b_p^{(n)}}{2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}(-i)^n n!}{(2p\pi)^n}=\frac{i^n n!}{(2p\pi)^n} \Rightarrow a_p^{(2n+1)}=b_p^{(2n)}=0$$

$$a_p^{(2n)}=\frac{((-1)^{n+1}(2n)!)}{2^{2n-1}p^{2n}\pi^{2n}} \qquad b_p^{(2n+1)}=\frac{((-1)^{n+1}(2n+1)!)}{2^{2n}p^{2n+1}\pi^{2n+1}}$$ d'où :

$$B_{2n}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2p\pi x)}{p^{2n}}\right) \text{ et } B_{2n+1}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{2n}\pi^{2n+1}}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2p\pi x)}{p^{2n+1}}\right)$$

cqfd

$$\boxed{E_{2n}(x)=\frac{(-1)^n 4(2n)!}{\pi^{2n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n+1}}}$$	*si* $n\geq 1$ *et* $0\leq x\leq 1$ $n=0$ *et* $0<x<1$
$$\boxed{E_{2n-1}(x)=\frac{(-1)^n 4(2n-1)!}{\pi^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n+1}}}$$	*si* $n\geq 1$ *et* $0\leq x\leq 1$

Démonstrations :

On utilise $E_{n-1}(x)=\frac{2^n}{n}(B_n(\frac{x+1}{2})-B_n(\frac{x}{2}))$

si $n\rightarrow 2n+1 \Rightarrow$ $E_{2n}(x)=\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)}(B_{2n+1}(\frac{x+1}{2})-B_{2n+1}(\frac{x}{2}))$

$$E_{2n}(x)=\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)}\frac{(-1)^{n+1}2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}}[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x+k\pi)}{k^{2n+1}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{k^{2n+1}}]$$

$$E_{2n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}2(2n)!}{(\pi)^{2n+1}}[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(k\pi x)}{k^{2n+1}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{k^{2n+1}}]$$

$$E_{2n}(x)=\frac{(-1)^n 4(2n)!}{\pi^{2n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n+1}}\quad \text{cqfd}$$

si $n\rightarrow 2n \Rightarrow$ $E_{2n-1}(x)=\frac{2^{2n}}{(2n)}(B_{2n}(\frac{x+1}{2})-B_{2n}(\frac{x}{2}))$

$$E_{2n-1}(x)=\frac{2^{2n}}{(2n)}\frac{(-1)^{n-1}2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x+k)}{k^{2n}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k^{2n}})$$

$$E_{2n-1}(x)=\frac{(-1)^{n-1}2(2n-1)!}{\pi^{2n}}(-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n}})$$

$$E_{2n-1}(x)=\frac{(-1)^n 4(2n-1)!}{\pi^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n+1}}\quad \text{cqfd}$$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2p\pi x)}{p^{2n}}\right)=(-1)^{n+1}\left(\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\right)B_{2n}(x)}$$ si $0 \leq x \leq 1$ $n > 0$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2p\pi x)}{p^{2n+1}}\right)=(-1)^{n+1}\left(\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)B_{2n+1}(x)}$$ si $0 \leq x \leq 1$ si $n > 0$, $0 < x < 1$ si $n = 0$

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{\cos((2p+1)\pi x)}{(2p+1)^{2n+1}}\right)=(-1)^{n}\left(\frac{\pi^{2n}}{4(2n-1)!}\right)E_{2n-1}(x)}$$ si $n \geq 1$ et $0 \leq x \leq 1$

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{(2p+1)^{2n+1}}\right)=(-1)^{n}\left(\frac{\pi^{2n+1}}{4(2n)!}\right)E_{2n}(x)}$$ si $n \geq 1 \; et \; 0 \leq x \leq 1$
$n = 0 \; et \; 0 < x < 1$

Démonstration : évident d'après les 4 formules précédentes. cqfd

VII) SÉRIES D’EULER

n	$\zeta(2n)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{2n}}\right)=\left(\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\right)\lvert B_{2n}\rvert$	$\alpha(2n)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p^{2n}}\right)=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\lvert B_{2n}\rvert$
1	$(1/6)\pi^{2}$	$(1/12)\pi^{2}$
2	$(1/90)\pi^{4}$	$(7/720)\pi^{4}$
3	$(1/945)\pi^{6}$	$(31/30240)\pi^{6}$
4	$(1/9450)\pi^{8}$	$(127/1209600)\pi^{8}$
5	$(1/93555)\pi^{10}$	$(73/6842880)\pi^{10}$
6	$(691/638512875)\pi^{12}$	$(1414477/1307674368000)\pi^{12}$
7	$(2/18243225)\pi^{14}$	$(8191/74724249600)\pi^{14}$
8	$(3617/325641566250)\pi^{16}$	$(16931177/1524374691840000)\pi^{16}$
9	$(43867/38979295480125)\pi^{18}$	$(5749691557/5109094217170944000)\pi^{18}$
10	$(174611/1531329465290625)\pi^{20}$	$(91546277357/802857662698291200000)\pi^{20}$

n	$\gamma(2n)=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2p+1)^{2n}}\right)=\left(\frac{2^{2n}-1}{2(2n)!}\right)\pi^{2n}\lvert B_{2n}\rvert$	$\beta(2n-1)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p^{2n-1}}\right)=\left(\frac{\pi^{2n-1}}{2^{2n}(2n-2)!}\right)\lvert E_{2n-2}\rvert$
1	$(1/8)\pi^{2}$	$(1/4)\pi$
2	$(1/96)\pi^{4}$	$(1/32)\pi^{3}$
3	$(1/960)\pi^{6}$	$(5/1536)\pi^{5}$
4	$(17/161280)\pi^{8}$	$(61/184320)\pi^{7}$
5	$(31/2903040)\pi^{10}$	$(277/8257536)\pi^{9}$
6	$(691/638668800)\pi^{12}$	$(50521/14863564800)\pi^{11}$
7	$(5461/49816166400)\pi^{14}$	$(540553/1569592442880)\pi^{13}$
8	$(929569/83691159552000)\pi^{16}$	$(199360981/5713316492083200)\pi^{15}$
9	$(3202291/2845499424768000)\pi^{18}$	$(3878302429/1096956766479974400)\pi^{17}$
10	$(221930581/1946321606541312000)\pi^{20}$	$(14814847529501/408173224980132554342400)\pi^{19}$

n	$\delta(2n+1)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{(2p+1)^{2n+1}}=\frac{\lvert E_{2n}\rvert}{(2n)!\,2^{2n+2}}\pi^{2n+1}$		
0	$(1r4)\pi$	5	$(50521r14863564800)\pi^{11}$
1	$(1r32)\pi^{3}$	6	$(540553r1569592442880)\pi^{13}$
2	$(5r1536)\pi^{5}$	7	$(199360981r5713316492083200)\pi^{15}$
3	$(61r184320)\pi^{7}$	8	$(3878302429r1096956766479974400)\pi^{17}$
4	$(277r8257536)\pi^{9}$	9	$(2404879675441r6713375410857443328000)\pi^{19}$

Démonstrations :

Dans $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2p\pi x)}{p^{2n}}\right)=(-1)^{n+1}\left(\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\right)B_{2n}(x)$ on pose x=0 , il vient :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{2n}}\right)=\left(\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\right)|B_{2n}| \quad \text{cqfd}$$

Dans cette même formule avec x=1/2 et $B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(1-\frac{1}{2^{2n-1}}\right)B_{2n}$ il vient :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p^{2n}}\right)=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}| \quad \text{cqfd}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{2n}}\right)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2p)^{2n}}\right)+\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2p+1)^{2n}}\right)=\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{2n}}\right)+\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2p+1)^{2n}}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2p+1)^{2n}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{2n}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\right)|B_{2n}|=\left(\frac{2^{2n}-1}{2(2n)!}\right)\pi^{2n}|B_{2n}| \quad \text{cqfd}$$

Dans $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2p\pi x)}{p^{2n+1}}\right)=(-1)^{n+1}\left(\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)B_{2n+1}(x)$ on pose x=1/4 $\Rightarrow$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{p}}{p^{2n+1}}\right)=(-1)^{n+1}\left(\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)B_{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right) \quad n\to n\text{-}1\Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p^{2n-1}}\right)=\left(\frac{2^{2n-2}\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\left|B_{2n-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right|$$

or $B_{2n-1}\left(\frac{1}{4}\right)=-\left(\frac{2n-1}{4^{2n-1}}\right)E_{2n-2}$ $\Rightarrow$ $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{p^{2n-1}}\right)=\left(\frac{\pi^{2n-1}}{2^{2n}(2n-2)!}\right)|E_{2n-2}|$ cqfd

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{(2p+1)^{2n+1}}\right)=(-1)^{n}\left(\frac{\pi^{2n+1}}{4(2n)!}\right)E_{2n}(x) \quad \boldsymbol{x=1/2} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^{2n+1}}\right)=(-1)^{n}\left(\frac{\pi^{2n+1}}{4(2n)!}\right)E_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{or} \quad E_{2n}(1/2)=\frac{E_{2n}}{2^{2n}} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{(2p+1)^{2n+1}}=\frac{|E_{2n}|}{(2n)!\,2^{2n+2}}\pi^{2n+1} \quad \text{cqfd}$$

VIII) Formule sommatoire de EULER-MAC LAURIN

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=h\{-(\frac{f(a)+f(b)}{2})+\sum_{p=0}^{m} f(x_p)\}-\sum_{k=1}^{n}(\frac{B_{2k}}{(2k)!})[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]h^{2k}+ER_{2n}(a,b,m)}$$

$$\boxed{|ER_{2n}(a,b,m)|\le(\frac{2n}{2n-1})(\frac{b-a}{\pi})^{2n}\frac{M_{2n}}{(2m)^{2n-1}}}$$ $M_{2n}=MAX|f^{(2n)}(z)|$ pour z dans $[a,b]$

f(x) et ses dérivées continues dans [a,b] jusqu'à l'ordre 2n+1

n et m entiers > 0 ; h=(b-a)/m $\quad x_p=a+ph$

Démonstration :

Soit F(x) continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2n+1 et $I_k=\int_0^1 B_k(x)F^{(k)}(x)dx$

en intégrant par parties : $I_k=\left[B_k(x)F^{(k-1)}(x)\right]_0^1-k\int_0^1 B_{k-1}(x)F^{(k-1)}(x)dx$

$$I_k=B_k[F^{(k-1)}(1)-F^{(k-1)}(0)]-kI_{k-1} \quad \text{(A)}$$

On a $I_{2k+1}=-(2k+1)I_{2k}$ car $B_{2k+1}=0$ d'où $\frac{I_{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{-I_{2k}}{(2k)!}$ (B)

on multiplie tout (A) par $(-1)^k/k!$ et on somme avec k variant de **2 à n** :

$$\sum_2^n(-1)^k\frac{I_k}{k!}=\sum_2^n(-1)^k\frac{B_k}{k!}[F^{(k-1)}(1)-F^{(k-1)}(0)]+\sum_2^n(-1)^{k-1}\frac{I_{k-1}}{(k-1)!}$$

on simplifie et on multiplie par $(-1)^n$

$\frac{I_n}{n!}=(-1)^n\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{B_k}{k!}[F^{(k-1)}(1)-F^{(k-1)}(0)]+(-1)^{n+1}I_1$ on fait **n→ 2n,** on utilise $B_{2k+1}=0$

$$\frac{I_{2n}}{(2n)!}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{B_{2k}}{(2k)!})[F^{(2k-1)}(1)-F^{(2k-1)}(0)]-I_1 \quad \text{(C)}$$

or $I_1=\int_0^1 B_1(x)F^{(1)}(x)dx=\int_0^1(x-\frac{1}{2})F^{(1)}(x)dx \quad \Rightarrow \quad I_1=[\frac{F(0)+F(1)}{2}]-\int_0^1 F(x)dx$ (D)

(C,D) ⇒ $\int_0^1 F(x)dx=[\frac{F(0)+F(1)}{2}]-\sum_{k=1}^{n}(\frac{B_{2k}}{(2k)!})[F^{(2k-1)}(1)-F^{(2k-1)}(0)]+G_{2n}$ (E)

où $G_{2n}=\frac{I_{2n}}{(2n)!}=\frac{-I_{2n+1}}{(2n+1)!}$ (E1)

Soit $a<b$ et $F(x)=f(a+(b-a)x) \Rightarrow F(0)=f(a)$, $F(1)=f(b)$, $F^{(n)}(x)=(b-a)^n f^{(n)}(a+(b-a)x)$
(E) ⇒

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx=\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B_{2k}}{(2k)!}\right)[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)](b-a)^{2k-1}+G_{2n}(a,b) \quad \text{(F)}$$

où

(F1)

$$G_{2n}(a,b)=\frac{(b-a)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(x)f^{(2n)}(a+(b-a)x)dx=\frac{-(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(x)f^{(2n+1)}(a+(b-a)x)dx$$

Découpons l'intervalle $[a,b]$ en m sous-intervalles de même longueur $h=(b-a)/m$ délimités par les points $a=x_0$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, … , $x_p=a+ph$, … , $x_m=b$
Appliquons les formules (F) et (F1) à chaque intervalle $[x_p,x_{p+1}]$ On obtient :

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x)dx=h\left(\frac{f(x_p)+f(x_{p+1})}{2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B_{2k}}{(2k)!}\right)[f^{(2k-1)}(x_{p+1})-f^{(2k-1)}(x_p)]h^{2k}+G_{2n}(x_p,x_{p+1})$$

On somme avec p variant de 0 à $m-1$. Il reste après simplification :

(G)

$$\int_a^b f(x)dx=h\left\{-\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)+\sum_{p=0}^{m} f(x_p)\right\}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B_{2k}}{(2k)!}\right)[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]h^{2k}+ER_{2n}(a,b,m)$$

$$ER_{2n}(a,b,m)=\sum_{p=0}^{m-1} G_{2n}(x_p,x_{p+1})=\frac{h^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(x)\sum_{p=0}^{m-1} f^{(2n)}(x_p+hx)dx \quad \text{(G1)}$$

de même :

$$ER_{2n}(a,b,m)=\sum_{p=0}^{m-1} G_{2n}(x_p,x_{p+1})=\frac{-h^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(x)\sum_{p=0}^{m-1} f^{(2n+1)}(x_p+hx)dx \quad \text{(G2)}$$

La moyenne $Moy=\frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} f^{(2n)}(x_p+hx)$ est située entre le mini et le maxi de $f^{(2n)}(x)$ pour

x dans $[a,b]$. Or $f^{(2n)}(x)$ étant continue, il existe z(x) dans [a,b] tel que $\mathbf{Moy=f^{(2n)}(z(x))}$.
Donc $ER_{2n}(a,b,m)=\frac{mh^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(x)f^{(2n)}(z(x))dx$. Dans cette expression, le module de l'intégrale est inférieur à $Max(|B_{2n}(x)|).Max(|f^{(2n)}(z)|)$.
Or on a posé $Max(|f^{(2n)}(z)|)=M_{2n}$ et on utilise $Max(|B_{2n}(x)|)=|B_{2n}|\leq \frac{(2n)}{(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$

d'où $|ER_{2n}(a,b,m)|\leq\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{2n}\frac{M_{2n}}{(2m)^{2n-1}}$ cqfd

IX) Applications de la formule sommatoire de EULER MAC LAURIN

A) Nombres harmoniques et constante de EULER MASCHERONI

On note par définition :

$\boxed{H(0)=1}$; $\boxed{H(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)}$ si ***n entier >0***

Posons $u_n=H(n)-\ln(n)$ et $v_n=u_n-\frac{1}{n}$ on a $u_n-v_n=\frac{1}{n}\geqslant 0$ et $\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$

Donc si ces suites convergent, elles ont la même limite γ.

Utilisons la propriété : $\ln(1+x)\leq x$ si $x>-1$

$$u_n-u_{n-1}=(H(n)-H(n-1))-(\ln(n)-\ln(n-1))=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=0 \Rightarrow u_n-u_{n-1}\leqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est **décroissante**.

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geqslant 0$ Donc la suite (v_n) est **croissante**.

Ce sont donc 2 suites adjacentes convergentes.

$$0=v_1<v_n<\gamma<u_n<u_1=1 \quad \text{d'où :}$$

Constante de EULER-MASCHERONI :

$\boxed{\gamma=\lim_{n\to\infty}(H(n)-\ln(n))}$ $\quad 0<\gamma<1$

Utilisons la formule de **EULER MAC LAURIN** avec

$f(x)=\frac{1}{x}$, $f^{(2p-1)}(x)=\frac{-(2p-1)!}{x^{2p}}$, ***a=1*** ***,b=m+1, h=1*** on obtient :

$$\int_1^{m+1}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\left(\frac{1}{(m+1)^{2p}}-1\right)+ER_{2n}(1,m+1,m) \Rightarrow$$

$$\ln(m+1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(m+1)}+\sum_{k=2}^{m+1}\frac{1}{k}-\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\left(\frac{1}{(m+1)^{2p}}-1\right)+ER_{2n}(1,m+1,m)$$

$$m\to m-1$$

$$\ln(m)=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2m}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\left(1-\frac{1}{m^{2p}}\right)+ER_{2n}(1,m,m-1)$$

$$(H(m)-\ln(m))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}+\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\left(1-\frac{1}{m^{2p}}\right)-ER_{2n}(1,m,m-1) \quad \textit{(a)}$$

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}(H(m)-\ln(m))=\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)-\lim_{m\to\infty} ER_{2n}(1,m,m-1)\quad \textit{(b)}$$ on fait ***(a)-(b)***

$$H(m)-\ln(m)-\gamma=\frac{1}{2m}-\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\frac{1}{m^{2p}}-\left[ER_{2n}(1,m,m-1)-\lim_{m\to\infty} ER_{2n}(1,m,m-1)\right]\ \Rightarrow$$

ici l'erreur est nulle quand $m\to\infty$ d'où :

$$\gamma=H(m)-\ln(m)-\frac{1}{2m}+\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\frac{1}{m^{2p}}+Err(n)\quad \text{avec}\quad |Err(n)|<\frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)\,m^{2n+2}}$$

$$\boxed{\gamma=H(m)-\ln(m)-\frac{1}{2m}+\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\frac{1}{m^{2p}}+Err(n)}$$

avec $\boxed{|Err(n)|<\frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)\,m^{2n+2}}=O\left(\frac{1}{m^{2n+2}}\right)}$

La suite des B_{2p} étant de signe alterné, l'erreur est inférieure au 1^er^ terme négligé.

Suite $\left(\frac{B_{2n}}{2n}\right)$ pour $1\le n\le 10$:

$$\frac{1}{12}\quad \frac{-1}{120}\quad \frac{1}{252}\quad \frac{-1}{240}\quad \frac{1}{132}\quad \frac{-691}{32760}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{-3617}{8160}\quad \frac{43867}{14364}\quad \frac{-174611}{6600}$$

En utilisant ***n=10*** et ***m=150*** on obtient pour la constante d'**EULER-MASCHERONI**

$$\boxed{\gamma=0.5772156649015329}$$

Enfin :

$$\boxed{H(m)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=\ln(m)+\gamma+\frac{1}{2m}-\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{B_{2p}}{2p}\right)\frac{1}{m^{2p}}+Err(n)}\quad \text{où}\quad \boxed{|Err(n)|<\frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)\,m^{2n+2}}}$$

Exemple :

Pour **m=10000**, on obtient le résultat exact avec **n = 3** (avec les 3 premiers termes de la somme uniquement), soit **9.787606036044384.**

B) Formule de STIRLING améliorée

$$\boxed{\ln(m!)=\ln\left(\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m}\right)+\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}\frac{1}{m^{2p-1}}+O\left(\frac{1}{m^{2n+2}}\right)}$$ forme logarithmique

La suite numérique $\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}$ pour **p entier de 1 à 10** est :

$$\frac{1}{12}\quad\frac{-1}{360}\quad\frac{1}{1260}\quad\frac{-1}{1680}\quad\frac{1}{1188}\quad\frac{-691}{360360}\quad\frac{1}{156}\quad\frac{-3617}{122400}\quad\frac{43867}{244188}\quad\frac{-174611}{125400}$$

$\boxed{m!=\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m}\,e^{h_n\left(\frac{1}{m}\right)}}$ **où** $\boxed{h_n(x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}x^{2p-1}}$ ***hₙ(x)*** **:** fonctions de **BINET**

$$\boxed{\begin{aligned}e^{h_{10}(x)}=1&+\frac{x}{12}+\frac{x^2}{288}-\frac{139x^3}{51840}-\frac{571x^4}{2488320}+\frac{163879x^5}{209018880}+\frac{5246819x^6}{75246796800}-\frac{534703531x^7}{902961561600}\\&-\frac{4483131259x^8}{86684309913600}+\frac{432261921612371x^9}{514904800886784000}+\frac{6232523202521089x^{10}}{86504006548979712000}+O(x^{11})\end{aligned}}$$

Démonstration :

Posons $u_n=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!}$ et $v_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{1}{e}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\Rightarrow v_n=-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$

$v_n=\frac{1}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n=L1$ (***L1*** nombre fini car il y a convergence). Or :

$$L1=\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\ln\left(\frac{u_{p+1}}{u_p}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{u_2u_3u_4}{u_1u_2u_3}\dots\frac{u_nu_{n+1}}{u_{n-1}u_n}\right)=\lim_{n\to\infty}(\ln(u_{n+1}))-\ln(u_1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\ln(u_n))=L2$$

$\lim_{n\to\infty}(u_n)=\frac{1}{L}=e^{L2}$ ***L*** est une constante finie $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(L\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\right)}{n!}\right)=1$

Lorsque ***n*** est « grand » $n!\sim L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ **(a)** ***L*** constante inconnue.

Pour calculer ***L*** démontrons la formule de **WALLIS**

Posons $w_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(x)dx$ on trouve immédiatement $w_0=\pi/2$ et $w_1=1$

De plus : $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(1-\sin^2(x))dx = w_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)(\sin(x)\cos^{n-2}(x))\,dx$

$$w_n = w_{n-2} - \left[\frac{-\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx = w_{n-2} - \frac{w_n}{n-1} \Rightarrow w_n = \frac{n-1}{n} w_{n-2} \Rightarrow$$

Si ***n*** → ***2n***

$$w_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}w_0 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(2)(1)}{[2^n n!]^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

Si ***n*** → ***2n+1***

$$w_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{3}\frac{2}{1}w_1 = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

pour $0 \le x \le \pi/2$ $\quad \cos^{2n+1}(x) \le \cos^{2n}(x) \le \cos^{2n-1}(x) \quad \Rightarrow \quad w_{2n+1} \le w_{2n} \le w_{2n-1}$

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \le \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi \le \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \Rightarrow \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)\left\{\frac{2}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\right\} \le 2\pi \le \left\{\frac{2}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\right\}$$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right) \le \frac{2\pi}{\left\{\frac{2}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\right\}} \le 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}} \le \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)} \le 1}$$ c'est la formule de **WALLIS**

Quand ***n*** est « grand » $\sqrt{2\pi} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)$ **(b)**

(a) et **(b)** ⇒ $\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}}\, 2^{2n} \frac{\left(L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{L\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = L \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{2\pi}$

D'où la formule de **STIRLING** : **(a)** ⇒ $\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

qui indique que le quotient de ***n!*** par $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ tend vers ***1*** quand ***n*** → ∞.

L'erreur relative tend donc vers **0 …** mais l'erreur absolue tend vers l'infini !

La formule sommatoire de **EULER MAC LAURIN** permet d'améliorer ce résultat.

Pour cela posons $f(x)=\ln(x)$ $f'(x)=\frac{1}{x}$ $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$ $\dots$ $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$f^{(2p-1)}(x)=\frac{-(2p-2)!}{x^{2p-1}}$ Il vient en faisant ***a=1, b=m, h=(b-a)/(m-1)=1***

$$\sum_{k=1}^{m}\ln(k)=\int_1^m \ln(x)\,dx+\frac{1}{2}\ln(m)-\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}(1-\frac{1}{m^{2p-1}})+ER(1,m,m-1)$$

$$\ln(m!)=m\ln(m)-m+\frac{1}{2}\ln(m)+1-\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}(1-\frac{1}{m^{2p-1}})+ER(1,m,m-1)$$

$$\ln(m!)=m\ln(m)-m+\frac{1}{2}\ln(m)+1-\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}(1-\frac{1}{m^{2p-1}})+ER(1,m,m-1)$$

$$\ln(m!)=\ln((\frac{m}{e})^m\sqrt{m})+1-\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}(1-\frac{1}{m^{2p*1}})+ER_{2n}(1,m,m-1)¿$$

$$\ln(\frac{m!}{((\frac{m}{e})^m\sqrt{m})})=1-\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}(1-\frac{1}{m^{2p-1}})+ER_{2n}(1,m,m-1)$$ et, si m $\rightarrow\infty$

$$\lim_{m\to\infty}\ln(\frac{m!}{((\frac{m}{e})^m\sqrt{m})})=\ln(\sqrt{2\pi})=1-\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}+\lim_{m\to\infty}ER_{2n}(1,m,m-1)\Rightarrow$$

$$\ln(\frac{m!}{((\frac{m}{e})^m\sqrt{m})})=\ln(\sqrt{2\pi})+\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}\frac{1}{m^{2p-1}}+ER_{2n}(1,m,m-1)-\lim_{m\to\infty}ER_{2n}(1,m,m-1)$$

Quand m est « grand » :

$$\ln(m!)=\ln((\frac{m}{e})^m\sqrt{2\pi m})+\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}\frac{1}{m^{2p-1}}+O(\frac{1}{m^{2n+2}})$$

Et, en prenant l'exponentielle des 2 membres et en posant : (fonctions de **BINET**)

$\boxed{h_n(x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}x^{2p-1}}$ on obtient $m!=(\frac{m}{e})^m\sqrt{2\pi m}\,e^{h_n(\frac{1}{m})}$

Le calcul (manuellement long et fastidieux!) de $e^{h_n(\frac{1}{m})}$ est aisé avec un ordinateur :

$$e^{h_{10}(x)}=1+\frac{x}{12}+\frac{x^2}{288}-\frac{139\,x^3}{51840}-\frac{571\,x^4}{2488320}+\frac{163879\,x^5}{209018880}+\frac{5246819\,x^6}{75246796800}-\frac{534703531\,x^7}{902961561600}$$

$$-\frac{4483131259\,x^8}{86684309913600}+\frac{432261921612371\,x^9}{514904800886784000}+\frac{6232523202521089\,x^{10}}{86504006548979712000}+O(x^{11})\ \text{cqfd}$$

Quelques conséquences pour n « très grand »:

$$\boxed{n! \sim (n/e)^n(2\pi n)^{1/2}\exp(h_m(1/n)) \sim (n/e)^n(2\pi n)^{1/2}[1+(1/12n)+(1/288n^2)...]}$$

Nombres centraux de **PASCAL** :

$$\boxed{C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{((n)!)^2}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\exp\left(h_m\left(\frac{1}{2n}\right)-h_m\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\left[1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}...\right]}$$

Nombres de **CATALAN :**

$$\boxed{C_n=\frac{C_{2n}^{n}}{(n+1)}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n^3}}\left[1-\frac{1}{8n}+\frac{145}{128n^2}...\right]}$$

Nombres de **BERNOULLI :**

$$\boxed{B_{2n}\sim(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\sim(-1)^{n+1}4\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}\sqrt{\pi n}\left[1+\frac{1}{24n}+\frac{1}{1152n^2}...\right]}$$

C) Fonction Zeta troncquée

On définit $\boxed{H_{(r)}(m)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^{r}}}$ où m entier **> 0** et r réel ≥ **1**

Le cas ***r=1*** a été étudié : $\boxed{H_1(m)=H(m)}$ Dans la suite on supposera ***r > 1***

De plus, $\boxed{\lim_{m\to\infty} H_{(r)}(m)=\zeta(r)}$ C'est la fonction **Zèta** de **RIEMANN**

$$\boxed{H_{(r)}(m)=\zeta(r)+\frac{1}{2}\frac{1}{m^{r}}-\frac{1}{(r-1)}\frac{1}{m^{r-1}}+\frac{1}{(r-1)}\sum_{p=1}^{n}C_{2p+r-2}^{2p}B_{2p}\frac{1}{m^{2p+r-1}}+O(\frac{1}{m^{2p+r+1}})}$$

Démonstration : soit r réel > *1*

Posons $f(x)=\frac{1}{x^{r}}$ $f'(x)=\frac{-r}{x^{r+1}}$ $f''(x)=\frac{r(r+1)}{x^{r+2}}$ … $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k}(r)(r+1)...(r+k-1)}{x^{r+k}}$

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k}(r+k-1)!}{(r-1)!\,x^{r+k}} \qquad f^{(2p-1)}(x)=-\frac{1}{(r-1)!}\frac{(r+2p-2)!}{x^{r+2p-1}}$$ On obtient :

$$\int_{1}^{m}\frac{dx}{x^{r}}=-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{m^{r}})+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^{r}}+\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{(2p)!}(\frac{(r+2p-2)!}{(r-1)!})(1-\frac{1}{m^{r+2p-1}})+ER_{2n}(1,m,m-1)$$

$$H_{(r)}(m)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{m^{r}})+\frac{1}{(r-1)}(1-\frac{1}{m^{r-1}})-\frac{1}{(r-1)}\sum_{p=1}^{n}C_{2p+r-2}^{2p}B_{2p}(1-\frac{1}{m^{2p+r-1}})-ER_{2n}(1,m,m-1)$$

Quand $m\to\infty$

$$\zeta(r)=\frac{1}{2}+\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r-1}\sum_{p=1}^{n}C_{2p-r-2}^{2p}B_{2p}+\lim_{m\to\infty}ER_{2n}(1,m,m-1)$$ en soustrayant :

$$H_{(r)}(m)=\zeta(r)+\frac{1}{2}\frac{1}{m^{r}}-\frac{1}{(r-1)}\frac{1}{m^{r-1}}+\frac{1}{(r-1)}\sum_{p=1}^{n}C_{2p+r-2}^{2p}B_{2p}\frac{1}{m^{2p+r-1}}+O(\frac{1}{m^{2p+r+1}})$$ cqfd

(pour r réel > *1*)

V) SCRIPT en J **NB. berneuler.ijs**

```
NB. Nombres et polynômes de BERNOULLI et EULER
require '~user/boitaoutil.ijs'
require '~user/devseries.ijs'


NB. Vecteur des (N+1) premiers nombres d'EULER
NB. R=. VNEULER N         NB. N : entier >: 0
     VNeul =: {{(_10x ser N)*!i.1x+N=.x:y}}"0


NB. Nième nombre d'EULER (origine 0)
NB. R=. Neul N
     Neul =: ({:@VNeul)"0


NB. N ième polynôme d'EULER
NB. R=. Peul N                NB. N : entier >: 0
     Peul =: {{)m
if.y=0 do. 1x return. end.
R=.(N+1)$0x [ p=._1x 2,(N-1)$0x [V=.(I!N)*(VNeul N) [ I=.i.>:N=.x:y
for_i. I do. R=.R sadd(i{V)*(p spui N-i) end.
R%2x^N
}}"0


NB. Vecteur des (N+1) premiers Nombres de BERNOULLI
NB. R=. VNber N                      NB. N : entier >: 0
     VNber =: {{(8x ser N)*!i.>:N=.x:y}}"0


NB. Nième nombre de BERNOULLI (origine 0)
NB. R=. Nber N
     Nber =: ({:@VNber)"0


NB. Idem (méthode itérative avec mémorisation)
NB. R=. VNberit N             NB. N : entier >: 0
     VNberit=:{{)m
if. (0=N=.x:y)do. 1x return. end.
K=.i.N [ N1=.>:N [ R=.0x
for_k. K do. R=.R+(k!N1)*VNberit k end.
-R%N1
}}M."0


NB. Nième nombre de BERNOULLI (méthode itérative)
NB. R=. Nberit N              NB. N : entier >  0
     Nberit =: ({:@VNberit)"0


NB. Le N ième polynôme de BERNOULLI
NB. R=. Pber N                NB. N : entier >  0
     Pber =: {{|.(VNber N)*(i.>:N)!N=.x:y}}"0
```

NB. Sommes de **BERNOULLI** : somme de (i.M)^n
NB. ***R=. n Somber1 M*** NB. n et M entiers >:0
Somber1=: {{+/(i.x:y)^<:X=.x:x}}"0 0

NB. Idem en utilisant les polynômes et constantes de **BERNOULLI**
NB. ***R=. n Somber2 M*** NB. n et M entiers >:0
Somber2=: {{(((Pber X)&p.Y=.x:y)-Nber X)%X=.x:x}}"0 0

NB. Sommes d'**EULER** : somme de (_1^M-k)*(k=.i.M+1)^n
NB. ***R=. n Someul1 M*** NB. n et M entiers >:0
Someul1=: {{(_1x^2x|x:y)*+/(_1x^k)*(k=.i.>:x:y)^x:x}}"0 0

NB. Idem en utilisant les polynômes et constantes d'**EULER**
NB. ***R=. n Someul2 M*** NB. n et M entiers >:0
Someul2=: {{(V=.-:(a (0)} V))p. >:x:y[a=.(1x+_1x^x:y)*{.V=.Peul x:x}}"0 0

NB. Coefficients de **Zeta (2*p)** = Somme de 1%(k^2*p) où 1<: k < _
NB. Zeta (2*p) = (CZeta2p p) * (Nber +:p) * 1p1 ^ +:p
CZeta2p=: {{(2x^<:p)*(|Nber p)%!p=.+:x:y}}"0

NB. Fonctions de **BINET** (à l'ordre 2M)
NB. ***R=. M Hbin y*** NB. M "petit" entier >0
Hbin=:{{+/((Nber K)%K*<:K)*y^<:K=.+:>:i. x: m}}

NB. Formule de **STIRLING** logarithmique (approximation asymptotique de **ln(n!)**)
NB. ***R=.StirL N*** NB. N entier >0
StirL =:{{^.((y%1x1)^y)*%:2p1*y}}"0

NB. Formule de **STIRLING** (approximation asymptotique de N!)
NB. ***R=.Stir N*** NB. N entier > 0
Stir=:{{((y%1x1)^y)*%:2p1*y}}"0

NB. Formule de **STIRLING** logarithmique améliorée (approximation asymptotique
NB. de **ln(n)** utilisant la fonction de **BINET** à l'ordre 2M)
NB. ***R=. M STIRL N*** NB. M et N entiers > 0
STIRL=: {{(StirL y)+x Hbin %y}}"0 0

NB. Formule de **STIRLING** améliorée
NB. ***R=. M STIR N*** NB. M et N entiers > 0
STIR=: {{(Stir y)*^x Hbin %y}}"0 0